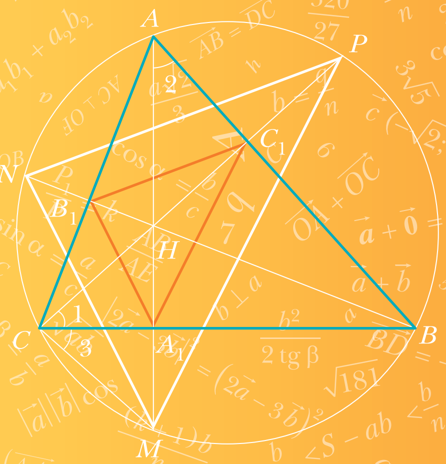
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

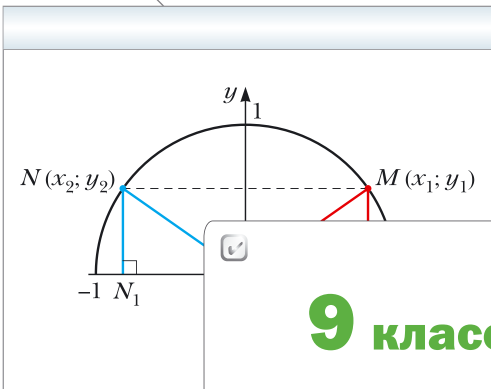
9 класс



Геометрия

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

Геометрия



9 класс

Учебник

Под редакцией В. Е. Подольского

Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации

7-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2022

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
М52

Под редакцией профессора кафедры математического анализа
механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова,
доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Издание выходит в pdf-формате.

Мерзляк, Аркадий Григорьевич.

М52 Геометрия : 9 класс : учебник : издание в pdf-формате / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир ; под ред. В. Е. Подольского. — 7-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 256 с. : ил.

ISBN 978-5-09-101280-4 (электр. изд.). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-087860-9 (печ. изд.).

Учебник предназначен для изучения геометрии в 9 классе общеобразовательных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к математике.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

Учебное издание

Мерзляк Аркадий Григорьевич, **Полонский** Виталий Борисович
Якир Михаил Семёнович

Геометрия

9 класс

Учебник

Редактор *Е. В. Буцко*. Художественный редактор *Е. В. Чайко*
Внешнее оформление *К. В. Бычкова*. Художники *Н. К. Вахонина, М. А. Хавторин, Е. Е. Исакова*. Фотографии *В. А. Андрианова, С. С. Митурича, «Фотобанк Лори» (Наталья Крупская), ООО «ТРИ КВАДРАТА», Shutterstock/FOTODOM*
Компьютерная вёрстка *О. В. Поповой*. Технический редактор *Л. В. Коновалова*
Корректоры *О. А. Мерзликина, Ю. С. Борисенко*

Подписано в печать 30.07.2021. Формат 70×90/16. Гарнитура NewBaskervilleITC.
Печ. л. 16,0. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru.**

ISBN 978-5-09-101280-4 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-087860-9 (печ. изд.)

От авторов

Дорогие девятиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучение геометрии. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями. Хотелось бы верить, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Учебник разделён на шесть глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным шрифтом**. Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Их можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи. Свои знания можно проверить, выполняя задания в тестовой форме из рубрики «Проверьте себя».

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, непростой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи средней сложности

✧ Сложные задачи

✵ Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

◄ Окончание доказательства теоремы или решения задачи

510 Задания, рекомендуемые для домашней работы

327 Задания для устной работы

Глава 1. Решение треугольников

В этой главе вы узнаете, что такое синус, косинус, тангенс и котангенс угла α, где $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

Вы научитесь по двум сторонам треугольника и углу между ними находить третью сторону, а также по стороне и двум прилежащим к ней углам находить две другие стороны треугольника.

В 8 классе вы научились решать прямоугольные треугольники. Изучив материал этой главы, вы сможете решать произвольные треугольники.

Вы узнаете новые формулы, с помощью которых можно находить площадь треугольника.

§ 1. Тригонометрические функции угла от 0° до 180°

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить содержание пункта 36 на с. 241.

Понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла вам знакомы из курса геометрии 8 класса. Расширим эти понятия для любого угла α, где $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

В верхней полуплоскости координатной плоскости рассмотрим полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 1). Такую полуокружность называют **единичной**.

Будем говорить, что **углу** α ($0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$) **соответствует точка** M единичной полуокружности, если $\angle MOA = \alpha$, где точки O и A имеют соответственно координаты (0; 0) и (1; 0) (см. рис. 1). Например, на рисунке 1 углу, равному 90°, соответствует точка C; углу, равному 180°, — точка B; углу, равному 0°, — точка A.

Рис. 1

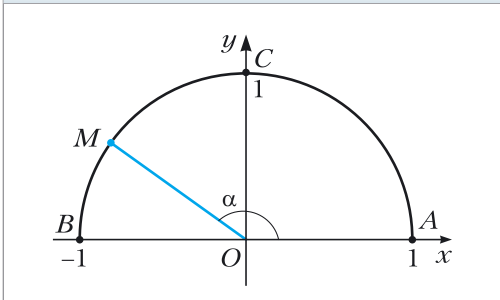
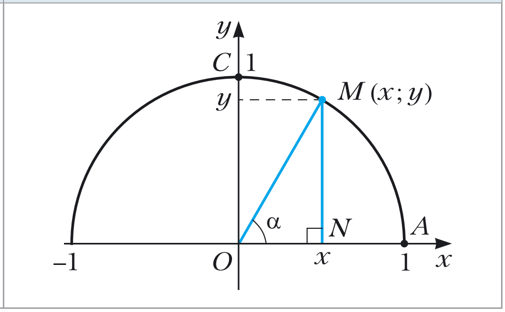


Рис. 2



Пусть α — острый угол. Ему соответствует некоторая точка M $(x; y)$ дуги AC единичной полуокружности (рис. 2). В прямоугольном треугольнике OMN имеем:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM}, \quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Поскольку $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, то $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.

Итак, косинус и синус острого угла α, которому соответствует точка M единичной полуокружности, — это соответственно абсцисса и ордината точки M.

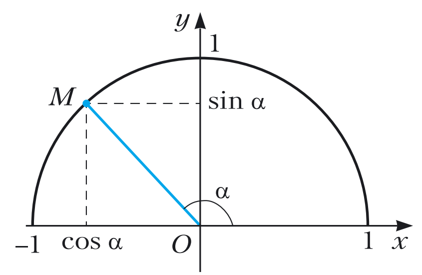
Полученный результат подсказывает, как определить синус и косинус любого угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Определение

Косинусом и синусом угла α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$), которому соответствует точка M единичной полуокружности, называют соответственно абсциссу и ординату точки M (рис. 3)**.**

Пользуясь этим определением, можно, например, установить, что: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Рис. 3



Если M $(x; y)$ — произвольная точка единичной полуокружности, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Следовательно, для любого угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, имеем:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Если α — тупой угол, то абсцисса точки, соответствующей этому углу, отрицательна. Следовательно, косинус тупого угла является отрицательным числом. Справедливо и такое утверждение: если $\cos\alpha < 0$, то α — тупой или развёрнутый угол.

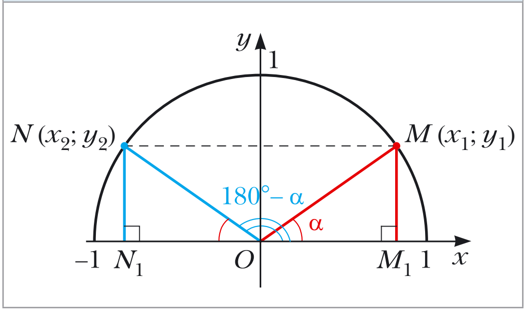
Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что для любого острого угла α выполняются равенства:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,\\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha\end{gathered}}$$

Эти формулы остаются справедливыми и для $\alpha = 0°$, и для $\alpha = 90°$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть углам α и $180° - \alpha$, где $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 90°$ и $\alpha \neq 180°$, соответствуют точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$ единичной полуокружности (рис. 4).

Рис. 4



Прямоугольные треугольники OMM_1 и ONN_1 равны по гипотенузе и острому углу ($ON = OM = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). Отсюда $y_2 = y_1$ и $x_2 = -x_1$. Следовательно:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

Убедитесь самостоятельно, что эти равенства остаются верными для $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$.

Если α — острый угол, то, как вы знаете из курса геометрии 8 класса, справедливо равенство, которое называют **основным тригонометрическим тождеством**:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Оно остаётся верным для $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть α — тупой угол, тогда угол $180° - \alpha$ является острым. Имеем:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin(180° - \alpha))^2 + (-\cos(180° - \alpha))^2 =$
$= \sin^2(180° - \alpha) + \cos^2(180° - \alpha) = 1.$

Следовательно, равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ выполняется для всех $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Определение

Тангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ и $\alpha \neq 90°$, называют отношение $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Поскольку $\cos 90° = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не определён для $\alpha = 90°$.

Определение

Котангенсом угла α, где $0° < \alpha < 180°$, называют отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Поскольку $\sin 0° = \sin 180° = 0$, то $\operatorname{ctg}\alpha$ не определён для $\alpha = 0°$ и $\alpha = 180°$.

Очевидно, что каждому углу α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ соответствует *единственная* точка единичной полуокружности. Значит, каждому углу α соответствует единственное число, которое является значением синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq 90°$, котангенса для $\alpha \neq 0°$ и $\alpha \neq 180°$). Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса, котангенса) от величины угла является функциональной.

Функции $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $p(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, соответствующие этим функциональным зависимостям, называют **тригонометрическими функциями** угла α.

<u>Задача 1.</u> Докажите, что $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$

$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = \frac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$ ◄

<u>Задача 2.</u> Найдите $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$, $\operatorname{ctg} 120°$.

Решение. $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$;

$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$;

$\operatorname{ctg} 120° = \operatorname{ctg}(180° - 60°) = -\operatorname{ctg} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. ◄

1. Какую полуокружность называют единичной?
2. Объясните, в каком случае говорят, что углу α соответствует точка M единичной полуокружности.
3. Что называют синусом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?

4. Что называют косинусом угла α, где $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$?
5. Чему равен $\sin 0^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\sin 180^\circ$, $\cos 180^\circ$?
6. В каких пределах находятся значения $\sin \alpha$, если $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$?
7. В каких пределах находятся значения $\cos \alpha$, если $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$?
8. Каким числом, положительным или отрицательным, является синус острого угла? Синус тупого угла? Косинус острого угла? Косинус тупого угла?
9. Каким углом является угол α, если $\cos \alpha < 0$?
10. Чему равен $\sin(180^\circ - \alpha)$, $\cos(180^\circ - \alpha)$?
11. Как связаны между собой синус и косинус одного и того же угла?
12. Что называют тангенсом угла α, где $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ и $\alpha \neq 90^\circ$?
13. Что называют котангенсом угла α, где $0^\circ < \alpha < 180^\circ$?
14. Почему $\operatorname{tg} \alpha$ не определён для $\alpha = 90^\circ$?
15. Почему $\operatorname{ctg} \alpha$ не определён для $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 180^\circ$?
16. Как называют функции $f(\alpha) = \sin \alpha$, $g(\alpha) = \cos \alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ и $p(\alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$?

Практическое задание

1. Начертите единичную полуокружность, взяв за единичный такой отрезок, длина которого в 5 раз больше стороны клетки тетради. Постройте угол, вершиной которого является начало координат, а одной из сторон — положительная полуось оси абсцисс:

1) косинус которого равен $\frac{1}{5}$;
2) косинус которого равен $-0,4$;
3) синус которого равен $0,6$;
4) синус которого равен 1;
5) косинус которого равен 0;
6) косинус которого равен -1.

Упражнения

2. Чему равен:
1) $\sin(180^\circ - \alpha)$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$;
2) $\cos(180^\circ - \alpha)$, если $\cos \alpha = 0,7$;
3) $\cos(180^\circ - \alpha)$, если $\cos \alpha = -\frac{4}{9}$;
4) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$, если $\operatorname{tg} \alpha = -5$;
5) $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{3}$?

3. Углы α и β смежные, $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Найдите $\cos\beta$.

2) Какой из углов α и β является острым, а какой — тупым?

4. Найдите значение выражения:

1) $2\sin 90^\circ + 3\cos 0^\circ$;

2) $3\sin 0^\circ - 5\cos 180^\circ$;

3) $\mathrm{tg}\, 23^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 0^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 106^\circ$;

4) $6\mathrm{tg}\, 180^\circ + 5\sin 180^\circ + \mathrm{ctg}\, 90^\circ$;

5) $\cos^2 165^\circ + \sin^2 165^\circ$;

6) $\dfrac{\sin 0^\circ + \sin 90^\circ}{\cos 0^\circ - \cos 90^\circ}$.

5. Вычислите:

1) $4\cos 90^\circ + 2\cos 180^\circ - \mathrm{ctg}\, 90^\circ$;

2) $\cos 0^\circ - \cos 180^\circ + \sin 90^\circ$.

6. Чему равен синус угла, если его косинус равен: 1) 1; 2) 0? Чему равен тангенс угла, если его котангенс равен: 1) 1; 2) $-\frac{1}{3}$?

7. Чему равен косинус угла, если его синус равен: 1) 1; 2) 0?
Чему равен котангенс угла, если его тангенс равен: 1) -1; 2) 3?

8. Найдите $\sin 135^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\mathrm{tg}\, 135^\circ$, $\mathrm{ctg}\, 135^\circ$.

9. Найдите $\sin 150^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\mathrm{tg}\, 150^\circ$, $\mathrm{ctg}\, 150^\circ$.

10. Существует ли угол α, для которого:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;

2) $\sin\alpha = 0{,}3$;

3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$;

4) $\cos\alpha = -0{,}99$;

5) $\cos\alpha = 1{,}001$;

6) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

11. Найдите:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$;

2) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$;

3) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

4) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$;

5) $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $90^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$;

6) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ и $0^\circ < \alpha \leqslant 90^\circ$.

12. Найдите:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$;

2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{6}$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $0^\circ \leqslant \alpha < 90^\circ$;

4) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$.

13. Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):
1) косинус острого угла больше косинуса тупого угла;
2) существует угол, синус и косинус которого равны;
3) существует угол, синус и косинус которого равны нулю;
4) косинус угла треугольника может быть равным отрицательному числу;
5) синус угла треугольника может быть равным отрицательному числу;
6) косинус угла треугольника может быть равным нулю;
7) синус угла треугольника может быть равным нулю;
8) косинус угла треугольника может быть равным -1;
9) синус угла треугольника может быть равным 1;
10) синус угла, отличного от прямого, меньше синуса прямого угла;
11) косинус развёрнутого угла меньше косинуса угла, отличного от развёрнутого;
12) синусы смежных углов равны;
13) косинусы неравных смежных углов являются противоположными числами;
14) если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы;
15) если синусы двух углов равны, то равны и сами углы;
16) тангенс острого угла больше тангенса тупого угла;
17) тангенс острого угла больше котангенса тупого угла?

14. Сравните с нулём значение выражения:
1) $\sin 110^\circ \cos 140^\circ$;
2) $\sin 80^\circ \cos 100^\circ \cos 148^\circ$;
3) $\sin 128^\circ \cos^2 130^\circ \operatorname{tg} 92^\circ$;
4) $\sin 70^\circ \cos 90^\circ \operatorname{tg} 104^\circ$;
5) $\operatorname{ctg} 100^\circ \sin 114^\circ \cos 11^\circ$;
6) $\cos 85^\circ \sin 171^\circ \operatorname{ctg} 87^\circ$.

15. Найдите значение выражения:
1) $2\sin 120^\circ + 4\cos 150^\circ - 2\operatorname{tg} 135^\circ$;
2) $\cos 120^\circ - 8\sin^2 150^\circ + 3\cos 90^\circ \cos 162^\circ$;
3) $\cos 180^\circ(\sin 135^\circ \operatorname{tg} 60^\circ - \cos 135^\circ)^2$;
4) $2\sin^2 150^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin^2 45^\circ + \operatorname{tg}^2 120^\circ - \operatorname{ctg}^2 30^\circ$.

16. Чему равно значение выражения:
1) $2\sin 150^\circ - 4\cos 120^\circ$;
2) $\operatorname{tg} 45^\circ \sin 120^\circ \operatorname{ctg} 150^\circ$;
3) $\sin 90^\circ(\operatorname{tg} 150^\circ \cos 135^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ \cos 135^\circ)^2$?

17. Найдите значение выражения, не пользуясь таблицами и калькулятором:
1) $\dfrac{\sin 18^\circ}{\sin 162^\circ}$; 2) $\dfrac{\cos 18^\circ}{\cos 162^\circ}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 18^\circ}{\operatorname{tg} 162^\circ}$; 4) $\dfrac{\operatorname{ctg} 18^\circ}{\operatorname{ctg} 162^\circ}$.

18. Найдите значение выражения, не пользуясь таблицами и калькулятором:
1) $\dfrac{\sin 28^\circ}{\sin 152^\circ}$; 2) $\dfrac{\cos 49^\circ}{\cos 131^\circ}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 12^\circ}{\operatorname{tg} 168^\circ}$.

19. Найдите сумму квадратов синусов всех углов прямоугольного треугольника.

20. Найдите сумму квадратов косинусов всех углов прямоугольного треугольника.

21. В треугольнике ABC известно, что $\angle B = 60^\circ$, точка O – центр вписанной окружности. Чему равен косинус угла AOC?

22. Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, $\cos \angle BOC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите угол A треугольника.

Упражнения для повторения

23. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, равна 5 см и делит сторону параллелограмма пополам. Острый угол параллелограмма равен 30°. Найдите диагональ параллелограмма, проведённую из вершины тупого угла, и углы, которые она образует со сторонами параллелограмма.

24. Прямая CE параллельна боковой стороне AB трапеции $ABCD$ и делит основание AD на отрезки AE и DE такие, что $AE = 7$ см, $DE = 10$ см. Найдите среднюю линию трапеции.

Готовимся к изучению новой темы

25. Две стороны треугольника равны 8 см и 11 см. Может ли угол, противолежащий стороне длиной 8 см, быть: 1) тупым; 2) прямым? Ответ обоснуйте.

26. В треугольнике ABC проведена высота BD, $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $AB = 10$ см. Найдите сторону BC.

27. Найдите высоту BD треугольника ABC и проекцию стороны AB на прямую AC, если $\angle BAC = 150^\circ$, $AB = 12$ см.

§ 2. Теорема косинусов

Из первого признака равенства треугольников следует, что две стороны и угол между ними однозначно определяют треугольник. А значит, по указанным элементам можно, например, найти третью сторону треугольника. Как это сделать, показывает следующая теорема.

Теорема 2.1

(теорема косинусов)

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC. Докажем, например, что
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Возможны три случая:

1) угол A — острый;
2) угол A — тупой;
3) угол A — прямой.

Первый случай. Пусть угол A — острый. Тогда хотя бы один из углов B или C является острым.

- Пусть $\angle C < 90^\circ$. Проведём высоту BD. Она будет полностью принадлежать треугольнику ABC (рис. 5).

В прямоугольном треугольнике ABD: $BD = AB \cdot \sin A$, $AD = AB \cdot \cos A$.

В прямоугольном треугольнике BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$
$= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$
$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$
$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$
$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

- Пусть $\angle B < 90^\circ$. Проведём высоту треугольника ABC из вершины C. Она будет полностью принадлежать треугольнику ABC. Доказательство этого случая аналогично рассмотренному. Проведите его самостоятельно.

Второй случай. Пусть угол A — тупой. Проведём высоту BD треугольника ABC (рис. 6).

Рис. 5

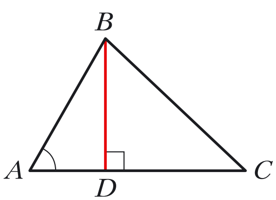
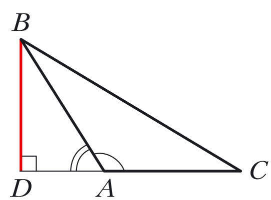


Рис. 6

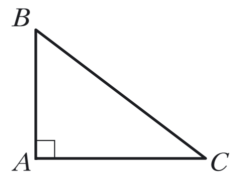


В прямоугольном треугольнике ABD: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD =$
$= AB \cdot \sin (180^\circ - A) = AB \cdot \sin A$,
$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos (180^\circ - A) = -AB \cdot \cos A$.

В прямоугольном треугольнике BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos\angle BAC)^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC$.

Третий случай. Пусть угол A — прямой (рис. 7). Тогда $\cos A = 0$. Надо доказать, что $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Это равенство следует из теоремы Пифагора для треугольника ABC. ◄

Рис. 7



Доказательство теоремы косинусов показывает, что *теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов, а теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора*.

С помощью теоремы косинусов, зная три стороны треугольника, можно определить, является ли он остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

Теорема 2.2

Пусть a, b и c — стороны треугольника, причём a — его наибольшая сторона. Если $a^2 < b^2 + c^2$, то треугольник остроугольный. Если $a^2 > b^2 + c^2$, то треугольник тупоугольный. Если $a^2 = b^2 + c^2$, то треугольник прямоугольный.

Доказательство

Пусть угол, противолежащий наибольшей стороне данного треугольника, равен α.

По теореме косинусов:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$.

Отсюда $2bc \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Если $a^2 < b^2 + c^2$, то $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Следовательно, $2bc \cos\alpha > 0$, т. е. $\cos\alpha > 0$. Поэтому угол α — острый.

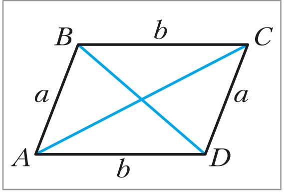
Поскольку a — наибольшая сторона треугольника, то против неё лежит наибольший угол, который, как мы доказали, является острым. Следовательно, в этом случае треугольник является остроугольным.

Если $a^2 > b^2 + c^2$, то $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Значит, $2bc \cos\alpha < 0$, т. е. $\cos\alpha < 0$. Следовательно, угол α — тупой. В этом случае треугольник является тупоугольным.

Если $a^2 = b^2 + c^2$, тогда $2bc \cos\alpha = 0$. Следовательно, $\cos\alpha = 0$. Отсюда $\alpha = 90°$. В этом случае треугольник является прямоугольным. ◄

Задача 1. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Рис. 8



Решение. На рисунке 8 изображён параллелограмм $ABCD$.

Пусть $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$.

По теореме косинусов для треугольника ABD:

$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$. (*)

По теореме косинусов для треугольника ACD:

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha)$.

Отсюда $AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$. (**)

Сложив равенства (*) и (**), получим

$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2$. ◄

Задача 2. В треугольнике ABC сторона AB на 4 см больше стороны BC, $\angle B = 120^\circ$, $AC = 14$ см. Найдите стороны AB и BC.

Решение. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B$.

Пусть $BC = x$ см ($x > 0$), тогда $AB = (x + 4)$ см.

Имеем:

$14^2 = (x+4)^2 + x^2 - 2x(x+4)\cos 120^\circ$;

$196 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 2x(x+4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;

$196 = 2x^2 + 8x + 16 + x(x+4)$;

$3x^2 + 12x - 180 = 0$;

$x^2 + 4x - 60 = 0$;

$x_1 = 6$; $x_2 = -10$.

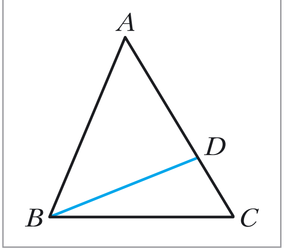
Корень $x_2 = -10$ не удовлетворяет условию $x > 0$.

Следовательно, $BC = 6$ см, $AB = 10$ см.

Ответ: 10 см, 6 см. ◄

Задача 3. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $CD : AD = 1 : 2$. Найдите отрезок BD, если $AB = 14$ см, $BC = 13$ см, $AC = 15$ см.

Рис. 9



Решение. По теореме косинусов для треугольника ABC (рис. 9):

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC\cos C$.

Отсюда $\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} =$

$= \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{33}{65}$.

Поскольку $CD : AD = 1 : 2$, то $CD = \frac{1}{3}AC = 5$ см.

Тогда в треугольнике BCD:

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$

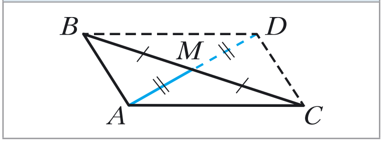
Следовательно, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $8\sqrt{2}$ см. ◄

Задача 4. Две стороны треугольника равны 23 см и 30 см, а медиана, проведённая к большей из известных сторон, — 10 см. Найдите третью сторону треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AC = 23$ см, $BC = 30$ см, отрезок AM — медиана, $AM = 10$ см.

Рис. 10



На продолжении отрезка AM за точку M отложим отрезок MD, равный медиане AM (рис. 10). Тогда $AD = 20$ см.

В четырёхугольнике $ABDC$ диагонали AD и BC точкой M пересечения делятся пополам ($BM = MC$ по условию, $AM = MD$ по построению). Следовательно, четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм.

Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, то:

$AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2).$

Тогда

$20^2 + 30^2 = 2(AB^2 + 23^2);$

$400 + 900 = 2(AB^2 + 529);$

$AB^2 = 121;$

$AB = 11$ см.

Ответ: 11 см. ◄

1. Сформулируйте теорему косинусов.
2. Остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник со сторонами a, b и c, где a — его наибольшая сторона, если:
   1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 > b^2 + c^2$; 3) $a^2 = b^2 + c^2$?
3. Как связаны между собой диагонали и стороны параллелограмма?

Упражнения

28. Найдите неизвестную сторону треугольника ABC, если:

1) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;

2) $AB = 3$ см, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$.

29. Найдите неизвестную сторону треугольника DEF, если:
1) $DE = 4$ см, $DF = 2\sqrt{3}$ см, $\angle D = 30°$;
2) $DF = 3$ см, $EF = 5$ см, $\angle F = 120°$.

30. Стороны треугольника равны 12 см, 20 см и 28 см. Найдите наибольший угол треугольника.

31. Стороны треугольника равны $\sqrt{18}$ см, 5 см и 7 см. Найдите средний по величине угол треугольника.

32. Установите, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны:
1) 5 см, 7 см и 9 см;
2) 5 см, 12 см и 13 см;
3) 10 см, 15 см и 18 см.

33. Установите, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны:
1) 7 см, 8 см и 12 см;
2) 8 см, 15 см и 17 см.

34. Как с помощью одной рулетки проверить, имеет ли крышка парты форму прямоугольника?

35. Стороны параллелограмма равны $2\sqrt{2}$ см и 5 см, а один из его углов равен 45°. Найдите диагонали параллелограмма.

36. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) известно, что $BC = 3$ см, $AD = 10$ см, $CD = 4$ см, $\angle D = 60°$. Найдите диагонали трапеции.

37. На стороне AB равностороннего треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD : DB = 2 : 1$. Найдите отрезок CD, если $AB = 6$ см.

38. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM : BM = 1 : 3$. Найдите отрезок CM, если $AC = BC = 4$ см.

39. Две стороны треугольника равны 3 см и 4 см, а синус угла между ними равен $\frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?

40. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = 20$ см, $BC = 15$ см. На стороне AB отметили точку M так, что $BM = 4$ см. Найдите отрезок CM.

41. На продолжении гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC за точку B отметили точку D так, что $BD = BC$. Найдите отрезок CD, если катет треугольника ABC равен a.

42. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $AC = 12$ см. На продолжении гипотенузы AB за точку B отметили точку D так, что $BD = 26$ см. Найдите отрезок CD.

43. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, удалён от концов гипотенузы на a см и b см. Найдите гипотенузу треугольника.

44. Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Найдите сторону AB.

45. Две стороны треугольника, угол между которыми равен $60°$, относятся как 5 : 8, а третья сторона равна 21 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

46. Две стороны треугольника относятся как $1 : 2\sqrt{3}$ и образуют угол, равный $30°$. Третья сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

47. Сумма двух сторон треугольника, образующих угол $120°$, равна 8 см, а длина третьей стороны составляет 7 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

48. Две стороны треугольника, угол между которыми равен $120°$, относятся как 5 : 3. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 30 см.

49. Две стороны треугольника равны 16 см и 14 см, а угол, противолежащий меньшей из известных сторон, равен $60°$. Найдите неизвестную сторону треугольника.

50. Две стороны треугольника равны 15 см и 35 см, а угол, противолежащий большей из известных сторон, равен $120°$. Найдите периметр треугольника.

51. На стороне BC треугольника ABC отметили точку D так, что $CD = 14$ см. Найдите отрезок AD, если $AB = 37$ см, $BC = 44$ см и $AC = 15$ см.

52. На стороне AB треугольника ABC отметили точку K, а на продолжении стороны BC за точку C – точку M. Найдите отрезок MK, если $AB = 15$ см, $BC = 7$ см, $AC = 13$ см, $AK = 8$ см, $MC = 3$ см.

53. Одна из сторон треугольника в 2 раза больше другой, а угол между этими сторонами составляет $60°$. Докажите, что данный треугольник является прямоугольным.

54. Докажите, что если квадрат стороны треугольника равен неполному квадрату суммы двух других сторон, то противолежащий этой стороне угол равен $120°$.

55. Докажите, что если квадрат стороны треугольника равен неполному квадрату разности двух других сторон, то противолежащий этой стороне угол равен $60°$.

56. Две стороны параллелограмма равны 7 см и 11 см, а одна из диагоналей – 12 см. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

57. Диагонали параллелограмма равны 13 см и 11 см, а одна из сторон – 9 см. Найдите периметр параллелограмма.

58. Диагонали параллелограмма равны 8 см и 14 см, а одна из сторон на 2 см больше другой. Найдите стороны параллелограмма.

59. Стороны параллелограмма равны 11 см и 23 см, а его диагонали относятся как 2 : 3. Найдите диагонали параллелограмма.

60. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) известно, что $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AD = 16$ см, $\cos A = \frac{1}{7}$. Найдите сторону CD трапеции.

61. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) известно, что $AB = \sqrt{15}$ см, $BC = 6$ см, $CD = 4$ см, $AD = 11$ см. Найдите косинус угла D трапеции.

62. Найдите диагональ AC четырёхугольника $ABCD$, если около него можно описать окружность и $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см.

63. Можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$, если $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $BD = 6$ см и $\angle C = 30^\circ$?

64. Докажите, что против большего угла параллелограмма лежит бóльшая диагональ. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

65. Стороны треугольника равны 12 см, 15 см и 18 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины его наибольшего угла.

66. Основание равнобедренного треугольника равно 5 см, а боковая сторона — 20 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины угла при его основании.

67. Стороны треугольника равны 16 см, 18 см и 26 см. Найдите медиану треугольника, проведённую к его большей стороне.

68. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана, проведённая к боковой стороне, — 5 см. Найдите боковую сторону треугольника.

69. Две стороны треугольника равны 12 см и 14 см, а медиана, проведённая к третьей стороне, — 7 см. Найдите неизвестную сторону треугольника.

70. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$. На продолжении отрезка AB за точку B отметили точку D так, что $BD = 2AB$. Докажите, что треугольник ACD равнобедренный.

71. Докажите, что $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a, b и c — стороны треугольника, m_c — медиана треугольника, проведённая к стороне c.

Упражнения для повторения

72. В окружности проведены диаметр AC и хорда AB, равная радиусу окружности. Найдите углы треугольника ABC.

73. Один из углов, образовавшихся при пересечении биссектрисы угла параллелограмма с его стороной, равен одному из углов параллелограмма. Найдите углы параллелограмма.

74. В треугольник ABC вписан параллелограмм $ADEF$ так, что угол A у них общий, а точки D, E и F принадлежат соответственно сторонам AB, BC и AC треугольника. Найдите стороны параллелограмма $ADEF$, если $AB = 8$ см, $AC = 12$ см, $AD : AF = 2 : 3$.

Готовимся к изучению новой темы

75. Найдите угол ADC (рис. 11), если $\angle ABC = 140°$.
76. Найдите угол ABC (рис. 12), если $\angle ADC = 43°$.
77. Отрезок AB — диаметр окружности, радиус которой равен R, $\angle ABC = \alpha$ (рис. 13). Найдите хорду AC.

Рис. 11

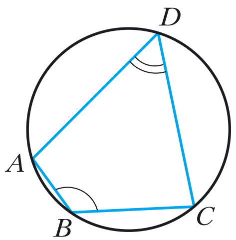


Рис. 12

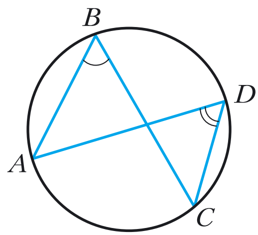
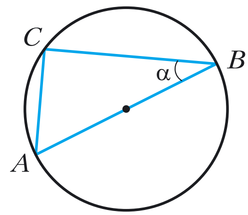


Рис. 13



Повторите содержание пункта 30 на с. 239.

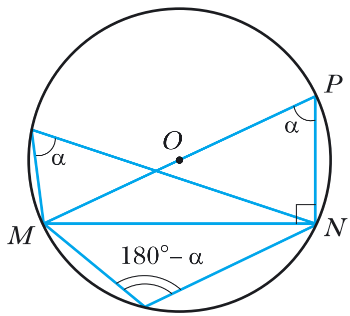
§ 3. Теорема синусов

При доказательстве ряда теорем и решении многих задач применяется следующая лемма.

Лемма

Хорда окружности равна произведению диаметра и синуса любого вписанного угла, опирающегося на эту хорду.

Рис. 14



Доказательство

На рисунке 14 отрезок MN — хорда окружности с центром в точке O. Проведём диаметр MP. Тогда $\angle MNP = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Пусть величина вписанного угла MPN равна α. Тогда в прямоугольном треугольнике MPN получаем:

$$MN = MP \sin \alpha. \qquad (*)$$

Все вписанные углы, опирающиеся на хорду MN, равны α или $180° - \alpha$. Следовательно, их синусы равны. Поэтому полученное равенство (*) справедливо для всех вписанных углов, опирающихся на хорду MN. ◄

Из второго признака равенства треугольников следует, что сторона и два прилежащих к ней угла однозначно определяют треугольник. Следовательно, по указанным элементам можно найти две другие стороны треугольника. Как это сделать, подсказывает следующая теорема.

Теорема 3.1
(теорема синусов)

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Пусть радиус описанной окружности треугольника ABC равен R. Тогда по лемме $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Отсюда:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$ ◄

Следствие

Радиус окружности, описанной около треугольника, можно вычислить по формуле

$$\boxed{R = \frac{a}{2 \sin \alpha},}$$

где a — сторона треугольника, α — противолежащий ей угол.

<u>**Задача 1.**</u> В треугольнике ABC известно, что $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 45°$. Найдите угол A.

Решение. По теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Тогда

$$\sin A = \frac{BC \sin B}{AC}, \ \sin A = \frac{1 \cdot \sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Следовательно, угол A — острый. Отсюда, учитывая, что $\sin A = \frac{1}{2}$, получаем $\angle A = 30^\circ$.

Ответ: 30°. ◄

Задача 2. В треугольнике ABC известно, что $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle A = 30^\circ$. Найдите угол B.

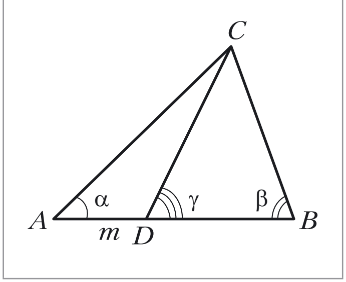
Решение. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Тогда $\sin B = \frac{AC \sin A}{BC}$, $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Тогда угол B может быть как острым, так и тупым. Отсюда $\angle B = 45^\circ$ или $\angle B = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Ответ: 45° или 135°. ◄

Задача 3. На стороне AB треугольника ABC отметили точку D так, что $\angle BDC = \gamma$, $AD = m$ (рис. 15). Найдите отрезок BD, если $\angle CAD = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Рис. 15



Решение. Угол BDC — внешний угол треугольника ADC. Тогда $\angle ACD + \angle CAD = \angle BDC$, отсюда $\angle ACD = \gamma - \alpha$.

По теореме синусов для треугольника ADC: $\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}$.

Следовательно, $CD = \frac{AD \sin \angle CAD}{\sin \angle ACD} = \frac{m \sin \alpha}{\sin(\gamma - \alpha)}$.

По теореме синусов для треугольника BCD: $\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}$.

Следовательно, $BD = \frac{CD \sin \angle BCD}{\sin \angle CBD} = \frac{m \sin \alpha \sin(180^\circ - (\beta + \gamma))}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)} = \frac{m \sin \alpha \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)}$.

Ответ: $\frac{m \sin \alpha \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)}$. ◄

Задача 4. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$ (рис. 16). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если радиус окружности, описанной около треугольника BDC, равен $8\sqrt{6}$ см.

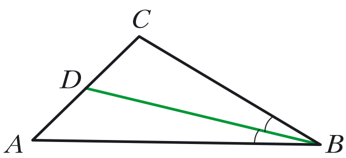


Рис. 16

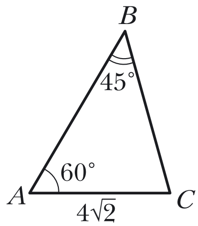


Рис. 17

Решение. Пусть R_1 — радиус окружности, описанной около треугольника BDC, $R_1 = 8\sqrt{6}$ см.

Так как отрезок BD — биссектриса треугольника, то $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC$. Тогда $\angle CBD = 15°$.

В треугольнике BDC: $\angle BDC = 180° - (\angle CBD + \angle C)$,

$\angle BDC = 180° - (15° + 105°) = 60°$.

По следствию из теоремы синусов $\frac{BC}{2\sin\angle BDC} = R_1$. Отсюда $BC = 2R_1\sin\angle BDC$, $BC = 2 \cdot 8\sqrt{6}\sin 60° = 24\sqrt{2}$ (см).

В треугольнике ABC: $\angle A = 180° - (\angle ABC + \angle C)$,

$\angle A = 180° - (30° + 105°) = 45°$.

Пусть R — искомый радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Тогда $\frac{BC}{2\sin A} = R$. Отсюда $R = \frac{24\sqrt{2}}{2\sin 45°} = 24$ (см).

Ответ: 24 см. ◄

1. Как найти хорду окружности, если известны диаметр окружности и вписанный угол, опирающийся на эту хорду?
2. Сформулируйте теорему синусов.
3. Как найти радиус окружности, описанной около треугольника со стороной a и противолежащим этой стороне углом α?

Упражнения

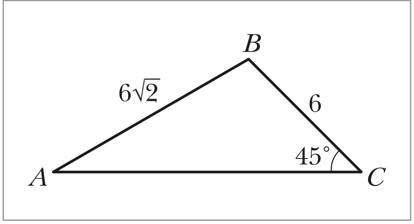
78. Найдите сторону BC треугольника ABC, изображённого на рисунке 17 (длина отрезка дана в сантиметрах).

79. Найдите угол A треугольника ABC, изображённого на рисунке 18 (длины отрезков даны в сантиметрах).

80. Найдите сторону AB треугольника ABC, если $AC = \sqrt{6}$ см, $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$.

81. В треугольнике ABC известно, что $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, $\sin A = 0{,}2$. Найдите синус угла C треугольника.

Рис. 18

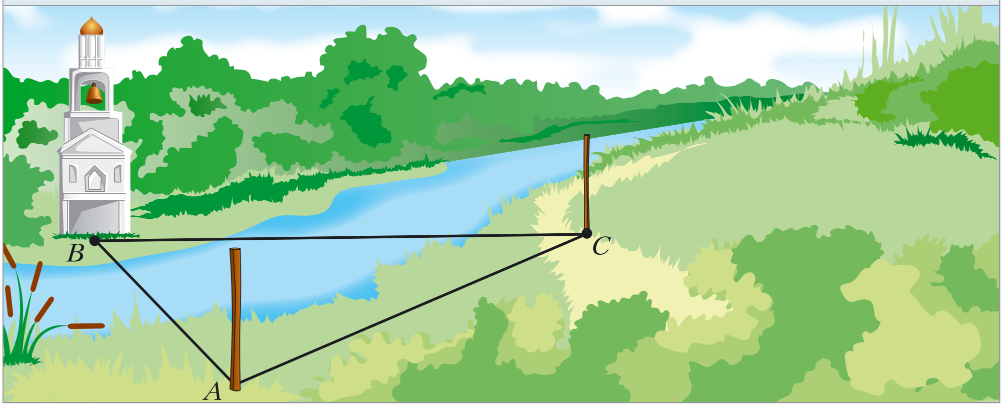


82. В треугольнике DEF известно, что $DE = 16$ см, $\angle F = 50°$, $\angle D = 38°$. Найдите сторону EF.

83. В треугольнике MKP известно, что $KP = 8$ см, $\angle K = 106°$, $\angle P = 32°$. Найдите сторону MP.

84. Для нахождения расстояния от точки A до колокольни B, расположенной на другом берегу речки (рис. 19), с помощью вех, рулетки и прибора для измерения углов (теодолита) отметили на местности точку C такую, что $\angle BAC = 42°$, $\angle ACB = 64°$, $AC = 20$ м. Как найти расстояние от A до B? Найдите это расстояние.

Рис. 19



85. В треугольнике ABC известно, что $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Найдите стороны AB и AC.

86. Диагональ параллелограмма равна d и образует с его сторонами углы α и β. Найдите стороны параллелограмма.

87. Найдите угол A треугольника ABC, если:
1) $AC = 2$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 135°$;
2) $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 45°$.
Сколько решений в каждом случае имеет задача? Ответ обоснуйте.

88. Существует ли треугольник ABC такой, что $\sin A = 0{,}4$, $AC = 18$ см, $BC = 6$ см? Ответ обоснуйте.

89. В треугольнике DEF известно, что $DE = 8$ см, $\sin F = 0{,}16$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника DEF.

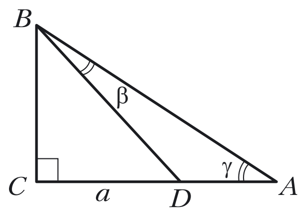
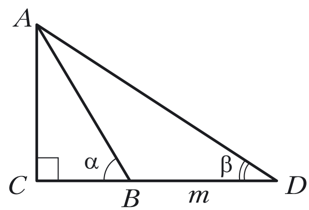
90. Радиус окружности, описанной около треугольника MKP, равен 5 см, $\sin M = 0{,}7$. Найдите сторону KP.

91. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B отметили точку D. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACD, если $\angle ABC = 60°$, $\angle ADC = 45°$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4 см.

92. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AOC, где O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, если $\angle ABC = 60°$.

93. Используя данные рисунка 20, найдите отрезок AD, если $CD = a$, $\angle BAC = \gamma$, $\angle DBA = \beta$.

94. Используя данные рисунка 21, найдите отрезок AC, если $BD = m$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$.

Рис. 20	**Рис. 21**
	

95. На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $\angle AMC = \varphi$. Найдите отрезок CM, если $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$.

96. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороне BC отметили точку D так, что $\angle ADB = \varphi$, $AD = m$. Найдите сторону BC.

97. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, длины которых обратно пропорциональны синусам прилежащих к этой стороне углов.

98. Две стороны треугольника равны 6 см и 12 см, а высота, проведённая к третьей стороне, — 4 см. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника.

99. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 16 см и боковой стороной 10 см.

100. Сторона треугольника равна 24 см, а радиус описанной окружности — $8\sqrt{3}$ см. Чему равен угол треугольника, противолежащий данной стороне?

101. Трасса для велосипедистов имеет форму треугольника, два угла которого равны 50° и 100°. Меньшую сторону этого треугольника один из велосипедистов проезжает за 1 ч. За какое время он проедет всю трассу? Ответ представьте в часах с точностью до десятых.

102. В треугольнике ABC известно, что $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Найдите биссектрису BD треугольника.

103. Основание равнобедренного треугольника равно a, противолежащий ему угол равен α. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины угла при основании.

104. Докажите, пользуясь теоремой синусов, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, длины которых пропорциональны прилежащим сторонам.

105. Основания равнобокой трапеции равны 9 см и 21 см, а высота — 8 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

106. Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая сторону AC в точке E, причём $AE = a$. Найдите отрезок CE.

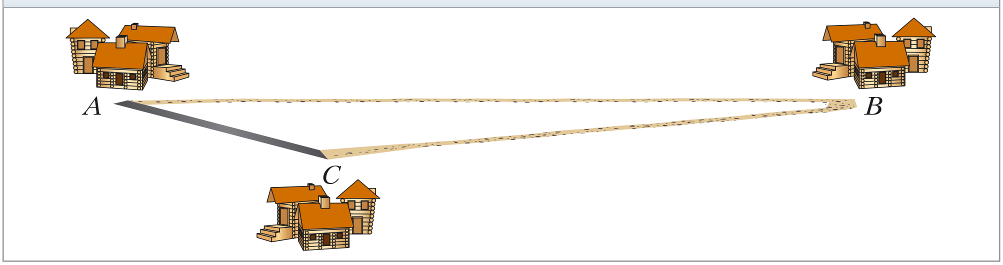
107. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы α и β соответственно. Найдите стороны AB и AC.

108. Медиана CD треугольника ABC образует со сторонами AC и BC углы α и β соответственно, $BC = a$. Найдите медиану CD.

109. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AHB, BHC, AHC и ABC, равны.

110. Дороги, соединяющие сёла A, B и C (рис. 22), образуют треугольник, причём дорога из села A в село C заасфальтирована, а дороги из се-

Рис. 22



ла A в село B и из села B в село C – грунтовые. Дороги, ведущие из села A в сёла B и C, образуют угол $15°$, а дороги, ведущие из села B в сёла A и C, – угол $5°$. Скорость движения автомобиля по асфальтированной дороге в 2 раза больше скорости движения по грунтовой. Какой маршрут надо выбрать водителю автомобиля, чтобы как можно скорее добраться из села A в село B?

111. Дороги из сёл A и B сходятся у развилки C (рис. 23). Дорога из села A до развилки образует с дорогой из села A в село B угол $30°$, а дорога из села B до развилки образует с дорогой из села B в село A угол $70°$. Одновременно из села A в направлении развилки выехал автомобиль со скоростью 90 км/ч, а из села B – автобус со скоростью 60 км/ч. Автомобиль или автобус первым доедет до развилки?

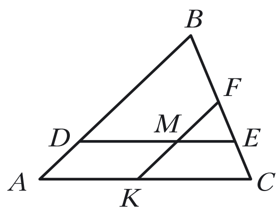
Упражнения для повторения

112. Биссектрисы углов B и C прямоугольника $ABCD$ пересекают сторону AD в точках M и K соответственно. Докажите, что $BM = CK$.

113. На рисунке 24 $DE \parallel AC$, $FK \parallel AB$. Укажите, какие треугольники на этом рисунке подобны.

Рис. 23

Рис. 24



114. На стороне AB квадрата $ABCD$ отметили точку K, а на стороне CD – точку M так, что $AK : KB = 1 : 2$, $DM : MC = 3 : 1$. Найдите сторону квадрата, если $MK = 13$ см.

Готовимся к изучению новой темы

115. Решите прямоугольный треугольник:

1) по двум катетам $a = 7$ см и $b = 35$ см;
2) по гипотенузе $c = 17$ см и катету $a = 8$ см;
3) по гипотенузе $c = 4$ см и острому углу $\alpha = 50°$;

4) по катету $a = 8$ см и противолежащему углу $\alpha = 42°$.

Повторите содержание пункта 37 на с. 241–242.

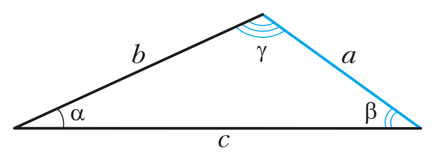
§ 4. Решение треугольников

Треугольник имеет шесть основных элементов: три стороны и три угла. Пусть известны три основных элемента, хотя бы один из которых является стороной. **Решить треугольник** — это значит найти три оставшихся элемента треугольника.

В 8 классе вы научились решать прямоугольные треугольники. Теоремы косинусов и синусов позволяют решить любой треугольник.

В следующих задачах значения тригонометрических функций будем находить с помощью калькулятора и округлять эти значения до сотых. Величины углов будем находить с помощью калькулятора и округлять эти значения до единиц. Вычисляя длины сторон, результат будем округлять до десятых.

Рис. 25



Задача 1. Решите треугольник (рис. 25) по стороне $a = 12$ см и двум углам $\beta = 36°$, $\gamma = 119°$.

Решение. Используя теорему о сумме углов треугольника, получим:

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$,

$\alpha = 180° - 155° = 25°$.

По теореме синусов: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$. Отсюда $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$. Имеем: $b = \frac{12\sin 36°}{\sin 25°} \approx \frac{12 \cdot 0,59}{0,42} \approx 16,9$ (см).

Вновь применяя теорему синусов, запишем $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$. Отсюда $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Имеем: $c = \frac{12\sin 119°}{\sin 25°} = \frac{12\sin 61°}{\sin 25°} \approx \frac{12 \cdot 0,87}{0,42} \approx 24,9$ (см).

Ответ: $b \approx 16{,}9$ см, $c \approx 24{,}9$ см, $\alpha = 25°$. ◄

Задача 2. Решите треугольник по двум сторонам $a = 14$ см, $b = 8$ см и углу $\gamma = 38°$ между ними.

Решение. По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Отсюда $c^2 = 196 + 64 - 2 \cdot 14 \cdot 8\cos 38° \approx 260 - 224 \cdot 0{,}79 = 83{,}04$, $c \approx 9{,}1$ см.

Далее имеем: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Отсюда $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos\alpha \approx \frac{8^2 + 9,1^2 - 14^2}{2 \cdot 8 \cdot 9,1} \approx -0,34$. Отсюда $\alpha \approx$ $\approx 110°$.

Используя теорему о сумме углов треугольника, получим:

$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$, $\beta \approx 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$.

Ответ: $c \approx 9{,}1$ см, $\alpha \approx 110^\circ$, $\beta \approx 32^\circ$. ◄

Задача 3. Решите треугольник по трём сторонам $a = 7$ см, $b = 2$ см, $c = 8$ см.

Решение. По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos\alpha = \dfrac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} \approx 0{,}59$. Получаем $\alpha \approx 54^\circ$.

По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$. Отсюда $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$. Получаем $\sin\beta \approx \dfrac{2\sin 54^\circ}{7} \approx \dfrac{2 \cdot 0{,}81}{7} \approx 0{,}23$.

Поскольку b является наименьшей стороной данного треугольника, то угол β — острый. Тогда находим, что $\beta \approx 13^\circ$.

Используя теорему о сумме углов треугольника, получим:

$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, $\gamma \approx 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$.

Ответ: $\alpha \approx 54^\circ$, $\beta \approx 13^\circ$, $\gamma \approx 113^\circ$. ◄

Задача 4. Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из сторон: 1) $a = 17$ см, $b = 6$ см, $\alpha = 156^\circ$; 2) $b = 7$ см, $c = 8$ см, $\beta = 65^\circ$; 3) $a = 6$ см, $b = 5$ см, $\beta = 50^\circ$.

Решение.

1) По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$. Отсюда $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$. Получаем

$$\sin\beta = \frac{6\sin 156^\circ}{17} = \frac{6\sin 24^\circ}{17} \approx \frac{6 \cdot 0{,}41}{17} \approx 0{,}14.$$

Так как угол α данного треугольника тупой, то угол β — острый. Тогда находим, что $\beta \approx 8^\circ$.

Используя теорему о сумме углов треугольника, получим:

$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, $\gamma \approx 16^\circ$.

По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Получаем $c \approx \dfrac{17\sin 16^\circ}{\sin 156^\circ} \approx$ $\approx \dfrac{17 \cdot 0{,}28}{0{,}41} \approx 11{,}6$ (см).

Ответ: $\beta \approx 8^\circ$, $\gamma \approx 16^\circ$, $c \approx 11{,}6$ см.

2) По теореме синусов $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$. Отсюда $\sin\gamma = \dfrac{c\sin\beta}{b}$, $\sin\gamma = \dfrac{8\sin 65^\circ}{7} \approx \dfrac{8 \cdot 0{,}91}{7} = 1{,}04$. Так как $1{,}04 > 1$, то угла γ не существует.

Ответ: задача не имеет решения.

3) По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$. Отсюда $\sin\alpha = \dfrac{a\sin\beta}{b}$. Получаем $\sin\alpha = \dfrac{6\sin 50^\circ}{5} \approx \dfrac{6 \cdot 0{,}77}{5} \approx 0{,}92$.

Возможны два случая: $\alpha \approx 67^\circ$ или $\alpha \approx 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$.
Рассмотрим случай, когда $\alpha \approx 67^\circ$.
Используя теорему о сумме углов треугольника, получим:
$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, $\gamma \approx 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$.

По теореме синусов $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Отсюда $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$, $c \approx \frac{5\sin 63^\circ}{\sin 50^\circ} \approx$
$\approx \frac{5 \cdot 0,89}{0,77} \approx 5,8$ (см).

Рассмотрим случай, когда $\alpha \approx 113^\circ$.
Используя теорему о сумме углов треугольника, получим:
$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, $\gamma \approx 180^\circ - 163^\circ = 17^\circ$.

Так как $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$, то $c \approx \frac{5\sin 17^\circ}{\sin 50^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0,29}{0,77} \approx 1,9$ (см).

Ответ: $\alpha \approx 67^\circ$, $\gamma \approx 63^\circ$, $c \approx 5,8$ см или $\alpha \approx 113^\circ$, $\gamma \approx 17^\circ$, $c \approx 1,9$ см. ◄

Что значит решить треугольник?

Упражнения

116. Решите треугольник по стороне и двум углам:
1) $a = 10$ см, $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 85^\circ$;
2) $b = 16$ см, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 110^\circ$.

117. Решите треугольник по стороне и двум углам:
1) $b = 9$ см, $\alpha = 35^\circ$, $\gamma = 70^\circ$;
2) $c = 14$ см, $\beta = 132^\circ$, $\gamma = 24^\circ$.

118. Решите треугольник по двум сторонам и углу между ними:
1) $b = 18$ см, $c = 22$ см, $\alpha = 76^\circ$;
2) $a = 20$ см, $b = 15$ см, $\gamma = 104^\circ$.

119. Решите треугольник по двум сторонам и углу между ними:
1) $a = 8$ см, $c = 6$ см, $\beta = 15^\circ$;
2) $b = 7$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 145^\circ$.

120. Решите треугольник по трём сторонам:
1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 7$ см;
2) $a = 26$ см, $b = 19$ см, $c = 42$ см.

121. Решите треугольник по трём сторонам:
1) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 8$ см;
2) $a = 21$ см, $b = 17$ см, $c = 32$ см.

122. Решите треугольник, в котором:
1) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10^\circ$, угол α — острый;
2) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10^\circ$, угол α — тупой.

123. Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из данных сторон:
1) $a = 7$ см, $b = 11$ см, $\beta = 46°$;
2) $b = 15$ см, $c = 17$ см, $\beta = 32°$;
3) $a = 7$ см, $c = 3$ см, $\gamma = 27°$.

124. Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из данных сторон:
1) $a = 23$ см, $c = 30$ см, $\gamma = 102°$;
2) $a = 18$ см, $b = 25$ см, $\alpha = 36°$.

125. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 20$ см, $\angle A = 70°$. Найдите: 1) сторону AC; 2) медиану CM; 3) биссектрису AD; 4) радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

126. Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 8 см, $\angle CAD = 38°$, $\angle BAD = 72°$. Найдите: 1) стороны трапеции; 2) радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

127. Основания трапеции равны 12 см и 16 см, а боковые стороны — 7 см и 9 см. Найдите углы трапеции.

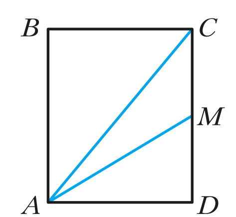
Упражнения для повторения

128. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке M, а продолжение стороны CD за точку D — в точке K. Найдите отрезок DK, если $AM = 8$ см, а периметр параллелограмма равен 50 см.

129. Периметр одного из двух подобных треугольников на 18 см меньше периметра другого треугольника, а наибольшие стороны этих треугольников равны 5 см и 8 см. Найдите периметры данных треугольников.

Готовимся к изучению новой темы

Рис. 26



130. Точка M — середина стороны CD прямоугольника $ABCD$, $AB = 6$ см, $AD = 5$ см (рис. 26). Чему равна площадь треугольника ACM?

131. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $\angle ADB = \alpha$. Докажите, что $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\alpha$.

Повторите содержание пункта 39 на с. 242.

Когда сделаны уроки

Тригонометрия — наука об измерении треугольников

Вы знаете, что древние путешественники ориентировались по звёздам и планетам. Они могли достаточно точно определить положение корабля в океане или каравана в пустыне по расположению светил на небосклоне. При этом одним из ориентиров служила высота над горизонтом, на которую поднималось то или иное небесное светило в данной местности в данный момент времени*. Понятно, что непосредственно измерить эту высоту невозможно. Поэтому учёные стали разрабатывать методы косвенных измерений. Здесь существенную роль играло решение треугольника, две вершины которого лежали на поверхности Земли, а третья являлась звездой или планетой (рис. 27).

Рис. 27

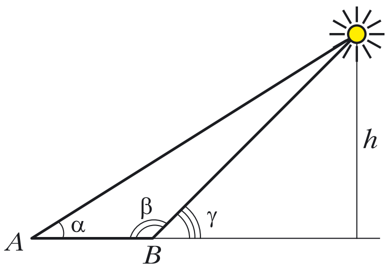
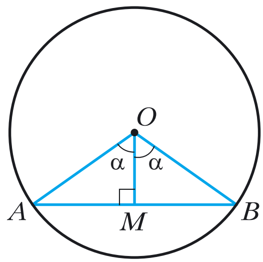


Рис. 28



Для решения подобных задач древним астрономам необходимо было научиться находить взаимосвязи между элементами треугольника. Так возникла **тригонометрия** – наука, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника. Термин «тригонометрия» (от греческих слов «тригонон» – треугольник и «метрео» – измерять) означает «измерение треугольников».

На рисунке 28 изображён центральный угол AOB, равный 2α. Из прямоугольного треугольника OMB имеем: $MB = OB \sin \alpha$. Следовательно, если в единичной окружности измерить половины длин хорд, на которые опираются центральные углы с величинами $2°$, $4°$, $6°$, ..., $180°$, то тем самым мы можем вычислить значения синусов углов $1°$, $2°$, $3°$, ..., $90°$ соответственно. Измеряя длины полухорд, древнегреческий астроном Гиппарх (II в. до н. э.) составил первые тригонометрические таблицы.

* Если вы хотите узнать больше о том, как в Древнем мире с помощью геометрии проводили астрономические исследования, то рекомендуем принять участие в проекте «Геометрия и астрономия» (см. с. 216).

Понятия «синус» и «косинус» появляются в тригонометрических трактатах индийских учёных в IV–V вв. В X в. арабские учёные оперировали понятием «тангенс», которое возникло из потребностей гномоники — учения о солнечных часах (рис. 29).

Рис. 29

В Европе первый трактат по тригонометрии «Пять книг о треугольниках всех видов», автором которого был немецкий учёный Региомонтан (1436–1476), был опубликован в 1533 г. Этот же учёный открыл и теорему тангенсов:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}},\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta+\gamma}{2}},\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\gamma+\alpha}{2}},$$

где a, b и c — стороны треугольника, α, β и γ — углы треугольника, противолежащие соответственно сторонам a, b и c.

Современный вид тригонометрия приобрела в работах выдающегося математика Леонарда Эйлера.

Леонард Эйлер (1707–1783)

Математик, физик, механик и астроном, автор более 850 научных работ. Член Петербургской, Берлинской, Парижской академий наук, Лондонского королевского общества, многих других академий и научных обществ. Имя Эйлера встречается почти во всех областях математики и её приложениях: теоремы Эйлера, тождества Эйлера, эйлеровы постоянные, углы, функции, интегралы, формулы, уравнения, подстановки и т. д. Родился в Швейцарии, с 1727 по 1741 г. и с 1766 г. до смерти работал в России. Оказал огромное влияние на развитие математического просвещения в России, возглавлял Петербургскую математическую школу. В ней под руководством Эйлера была создана обширная и замечательная для своего времени учебная литература.

§ 5. Формулы для нахождения площади треугольника

Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что площадь S треугольника можно вычислить по формулам

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

где a, b и c — стороны треугольника, h_a, h_b и h_c — высоты, проведённые к этим сторонам соответственно.

Теперь у нас появилась возможность получить ещё несколько формул для нахождения площади треугольника.

Теорема 5.1

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, площадь которого равна S, такой, что $BC = a$, $AC = b$ и $\angle C = \gamma$. Докажем, что $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Возможны три случая:

1) угол γ — острый (рис. 30);

2) угол γ — тупой (рис. 31);

3) угол γ — прямой.

Рис. 30

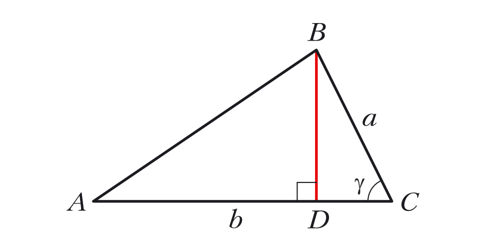
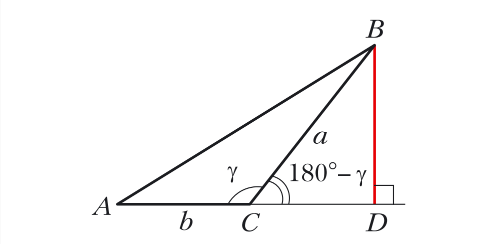


Рис. 31

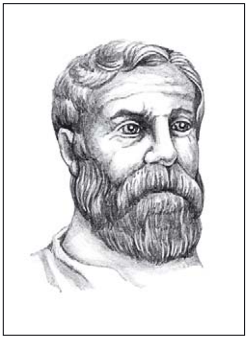


Проведём высоту BD треугольника ABC (см. рис. 30, 31). Тогда $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}BD \cdot b$.

В треугольнике BDC в первом случае (см. рис. 30) $BD = a\sin\gamma$, а во втором (см. рис. 31) $BD = a\sin(180^\circ - \gamma) = a\sin\gamma$. Отсюда для обоих случаев имеем: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Если угол C — прямой, то $\sin\gamma = 1$. Для прямоугольного треугольника ABC с катетами a и b имеем:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab\sin 90^\circ = \frac{1}{2}ab\sin\gamma. \blacktriangleleft$$



Герон Александрийский
(вторая половина I в. н. э.)

Древнегреческий математик и механик, работавший в Александрии. Математические работы Герона являются энциклопедией античной прикладной математики.

Теорема 5.2
(формула Герона)

Площадь S треугольника можно вычислить по формуле

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

где a, b и c — стороны треугольника, p — его полупериметр.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, площадь которого равна S, такой, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажем, что $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Пусть $\angle C = \gamma$. Запишем формулу площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Отсюда $S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma$.

По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Тогда $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Так как $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma)$, то:

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(c^2 - (a-b)^2\right)\left((a+b)^2 - c^2\right) =$$

$$= \frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)-2a}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2b}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{2p-2a}{2} \cdot \frac{2p-2b}{2} \cdot \frac{2p-2c}{2} \cdot \frac{2p}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Таким образом, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. ◀

Теорема 5.3

Площадь S треугольника можно вычислить по формуле

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$$

где a, b, c — стороны треугольника, R — радиус окружности, описанной около треугольника.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, площадь которого равна S, такой, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажем, что $S = \frac{abc}{4R}$, где R – радиус описанной окружности данного треугольника. Площадь треугольника можно найти по формуле: $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, где $\angle A = \alpha$.

Из леммы § 3 следует, что $a = 2R\sin\alpha$. Тогда $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$. ◀

Заметим, что доказанная теорема позволяет находить радиус окружности, описанной около треугольника, по формуле

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Теорема 5.4

Площадь треугольника равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности.

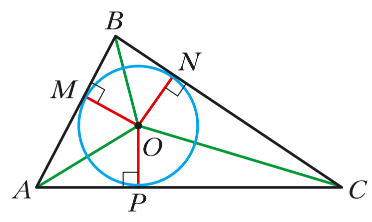
Доказательство

На рисунке 32 изображён треугольник ABC, в который вписана окружность радиуса r. Докажем, что

$$S = pr,$$

где S — площадь данного треугольника, p — его полупериметр.

Рис. 32



Пусть точка O — центр вписанной окружности, которая касается сторон треугольника ABC в точках M, N и P. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AOB, BOC, COA.

$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}$.

Проведём радиусы в точки касания. Получаем: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Отсюда:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} ON \cdot BC = \frac{1}{2} r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2} OP \cdot AC = \frac{1}{2} r \cdot AC.$$

Следовательно, $S = \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot BC + \frac{1}{2} r \cdot AC =$

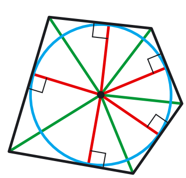
$$= r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr. \blacktriangleleft$$

Следующая теорема обобщает теорему 5.4.

Теорема 5.5

Площадь многоугольника, описанного около окружности, равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности.

Рис. 33



Докажите эту теорему самостоятельно (рис. 33).

Заметим, что теорема 5.5 позволяет находить радиус вписанной окружности многоугольника по формуле

$$r = \frac{S}{p}$$

Задача 1. Докажите, что площадь параллелограмма можно вычислить по формуле

$$S = ab \sin \alpha,$$

где a и b — соседние стороны параллелограмма, α — угол между ними.

Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 34).

Проведём диагональ BD. Поскольку $\Delta ABD = \Delta CDB$, то:

$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \alpha = ab \sin \alpha$. ◄

Рис. 34

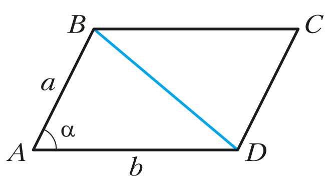
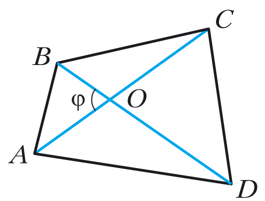


Рис. 35



Задача 2. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей и синуса угла между ними.

Решение. Пусть угол между диагоналями AC и BD четырёхугольника $ABCD$ равен φ. На рисунке 35 $\angle AOB = \varphi$.

Тогда $\angle BOC = \angle AOD = 180^\circ - \varphi$ и $\angle COD = \varphi$. Имеем:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin(180^\circ - \varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD \cdot OA \cdot \sin(180^\circ - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} OB\ (OA + OC) \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD\ (OC + OA) \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} OB \cdot AC \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD \cdot AC \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} AC\ (OB + OD) \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi.$$ ◄

Задача 3. Стороны треугольника равны 17 см, 65 см и 80 см. Найдите наименьшую высоту треугольника, радиусы его вписанной и описанной окружностей.

Решение. Пусть $a = 17$ см, $b = 65$ см, $c = 80$ см.

Найдём полупериметр треугольника: $p = \frac{17 + 65 + 80}{2} = 81$ (см). Площадь треугольника вычислим по формуле Герона:

$$S = \sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)} = \sqrt{81 \cdot 64 \cdot 16} = 9 \cdot 8 \cdot 4 = 288 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Наименьшей высотой треугольника является высота h, проведённая к его наибольшей стороне c.

Так как $S = \frac{1}{2}ch$, то $h = \frac{2S}{c}$, $h = \frac{2 \cdot 288}{80} = 7{,}2$ (см).

Радиус r вписанной окружности равен $\frac{S}{p}$. Отсюда $r = \frac{288}{81} = \frac{32}{9}$ (см).

Радиус R описанной окружности равен $\frac{abc}{4S}$. Отсюда $R = \frac{17 \cdot 65 \cdot 80}{4 \cdot 288} =$

$= \frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{4 \cdot 18} = \frac{5525}{72}$ (см).

Ответ: 7,2 см, $\frac{32}{9}$ см, $\frac{5525}{72}$ см. ◄

1. Как можно найти площадь треугольника, если известны две его стороны и угол между ними?
2. Запишите формулу Герона для вычисления площади треугольника.
3. Как можно найти площадь треугольника, если известны три его стороны и радиус описанной окружности?
4. Как можно найти радиус окружности, описанной около треугольника, если известны стороны треугольника и его площадь?
5. Как можно найти площадь треугольника, если известны его полупериметр и радиус вписанной окружности?
6. Как можно найти радиус окружности, вписанной в треугольник, если известны площадь треугольника и его стороны?
7. Чему равна площадь многоугольника, описанного около окружности?

Упражнения

132. Найдите площадь треугольника ABC, если:
1) $AB = 12$ см, $AC = 9$ см, $\angle A = 30°$;
2) $AC = 3$ см, $BC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135°$.

133. Найдите площадь треугольника DEF, если:
1) $DE = 7$ см, $DF = 8$ см, $\angle D = 60°$;
2) $DE = 10$ см, $EF = 6$ см, $\angle E = 150°$.

134. Площадь треугольника MKN равна 75 см^2. Найдите сторону MK, если $KN = 15$ см, $\angle K = 30°$.

135. Найдите угол между данными сторонами треугольника ABC, если:
1) $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, площадь треугольника равна $30\sqrt{3}$ см^2;
2) $AB = 14$ см, $AC = 8$ см, площадь треугольника равна 56 см^2.

136. Площадь треугольника ABC равна 18 см^2. Найдите угол C, если $AC = 8$ см, $BC = 9$ см.

137. Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной 16 см и углом 15° при основании.

138. Найдите площадь треугольника со сторонами: 1) 13 см, 14 см, 15 см; 2) 2 см, 3 см, 4 см.

139. Найдите площадь треугольника со сторонами: 1) 9 см, 10 см, 17 см; 2) 4 см, 5 см, 7 см.

140. Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами 13 см, 20 см и 21 см.

141. Найдите наибольшую высоту треугольника со сторонами 11 см, 25 см и 30 см.

142. Периметр треугольника равен 32 см, а радиус вписанной окружности — 1,5 см. Найдите площадь треугольника.

143. Площадь треугольника равна 84 см^2, а его периметр — 72 см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

144. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами:
1) 5 см, 5 см и 6 см; 2) 25 см, 29 см и 36 см.

145. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 6 см, 25 см и 29 см.

146. Найдите площадь параллелограмма по его сторонам a и b и углу α между ними, если:
1) $a = 5\sqrt{2}$ см, $b = 9$ см, $\alpha = 45°$;
2) $a = 10$ см, $b = 18$ см, $\alpha = 150°$.

147. Чему равна площадь параллелограмма, стороны которого равны 7 см и 12 см, а один из углов — 120°?

148. Найдите площадь ромба со стороной $9\sqrt{3}$ см и углом 60°.

149. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны 8 см и 12 см, а угол между ними — 30°. Найдите площадь четырёхугольника.

150. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, диагонали которого равны $3\sqrt{3}$ см и 4 см, а угол между ними — 60°.

151. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, площадь которого равна 36 см^2, а угол при вершине — 30°.

152. Какой треугольник с двумя данными сторонами имеет наибольшую площадь?

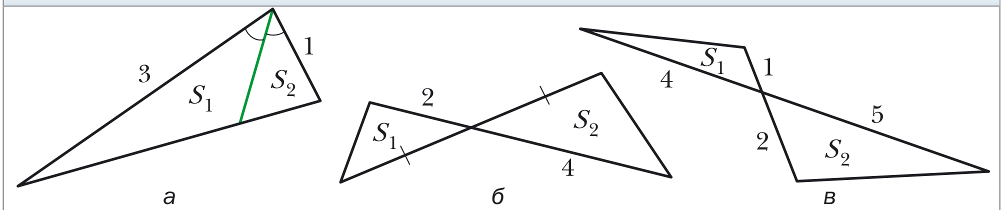
153. Может ли площадь треугольника со сторонами 4 см и 6 см быть равной: 1) 6 см^2; 2) 14 см^2; 3) 12 см^2?

154. Две соседние стороны параллелограмма соответственно равны двум соседним сторонам прямоугольника. Чему равен острый угол параллелограмма, если его площадь в два раза меньше площади прямоугольника?

155. 1) Найдите отношение площадей S_1 и S_2 треугольников, изображённых на рисунке 36 (длины отрезков даны в сантиметрах).

2) Площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны S_1 и S_2. Известно, что углы при вершинах A и A_1 равны. Докажите, что $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$.

Рис. 36



156. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Площадь треугольника ABD равна 12 см^2, а треугольника ACD — 20 см^2. Найдите отношение стороны AB к стороне AC.

157. Найдите площадь треугольника, сторона которого равна a, а прилежащие к ней углы равны β и γ.

158. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен R, а два угла треугольника равны α и β. Найдите площадь треугольника.

159. В треугольнике ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите площадь треугольника.

160. В треугольнике ABC угол A равен α, а высоты BD и CE равны соответственно h_1 и h_2. Найдите площадь треугольника ABC.

161. Отрезок BM — высота треугольника ABC, $BM = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Найдите площадь треугольника ABC.

162. В треугольник со сторонами 17 см, 25 см и 28 см вписана окружность, центр которой соединён с вершинами треугольника. Найдите площади образовавшихся треугольников.

163. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $\angle BAC = 120°$. Найдите биссектрису AD.

164. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 см и 50 см, а боковые стороны — 13 см и 37 см.

165. Основания трапеции равны 4 см и 5 см, а диагонали — 7 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

166. Отрезки BM и CK — высоты остроугольного треугольника ABC, $\angle A = 45°$. Найдите отношение площадей треугольников AMK и ABC.

167. Стороны треугольника равны 39 см, 41 см и 50 см. Найдите радиус окружности, центр которой принадлежит большей стороне треугольника и которая касается двух других сторон.

168. Вершины треугольника соединены с центром вписанной в него окружности. Проведённые отрезки разбивают данный треугольник на треугольники, площади которых равны 26 см^2, 28 см^2 и 30 см^2. Найдите стороны данного треугольника.

169. Докажите, что $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$, где h_1, h_2 и h_3 — высоты треугольника, r — радиус вписанной окружности.

Упражнения для повторения

170. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит его угол в отношении 4 : 5. Определите угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.

171. Средняя линия MK трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 56 см. Через середину M стороны AB проведена прямая, которая параллельна стороне CD и пересекает основание AD в точке E так, что $AE : ED = 5 : 8$. Найдите основания трапеции.

172. Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, которая параллельна прямой AC и пересекает сторону BC в точке E. Найдите отрезок DE, если $AC = 16$ см, $BC = 24$ см.

Готовимся к изучению новой темы

173. Найдите сумму углов выпуклого семиугольника.

174. Существует ли выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна: 1) 1080°; 2) 1200°?

175. Существует ли многоугольник, каждый угол которого равен: 1) 72°; 2) 171°?

176. Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):

1) если все стороны многоугольника, вписанного в окружность, равны, то и все его углы также равны;

2) если все углы многоугольника, вписанного в окружность, равны, то и все его стороны также равны;

3) если все стороны многоугольника, описанного около окружности, равны, то и все его углы также равны;

4) если все углы многоугольника, описанного около окружности, равны, то и все его стороны также равны?

Когда сделаны уроки

Вневписанная окружность треугольника

Проведём биссектрисы двух внешних углов с вершинами A и C треугольника ABC (рис. 37). Пусть O — точка пересечения этих биссектрис. Тогда точка O равноудалена от прямых AB, BC и AC.

Проведём три перпендикуляра: $OM \perp AB$, $OK \perp AC$ и $ON \perp BC$. Очевидно, что $OM = OK = ON$. Следовательно, существует окружность с центром в точке O, которая касается стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Такую окружность называют **вневписанной окружностью** треугольника ABC (см. рис. 37).

Так как $OM = ON$, то точка O принадлежит биссектрисе угла ABC.

Рис. 37

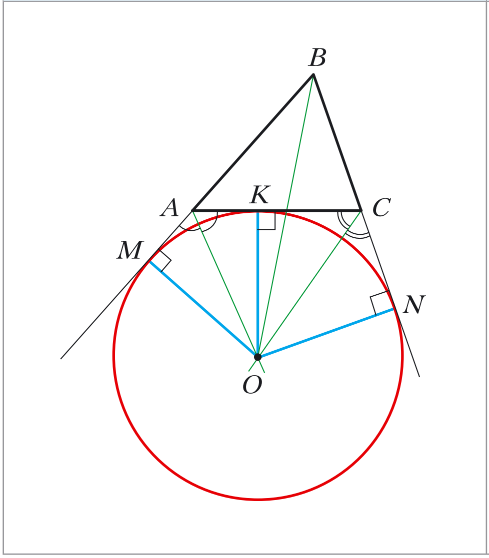
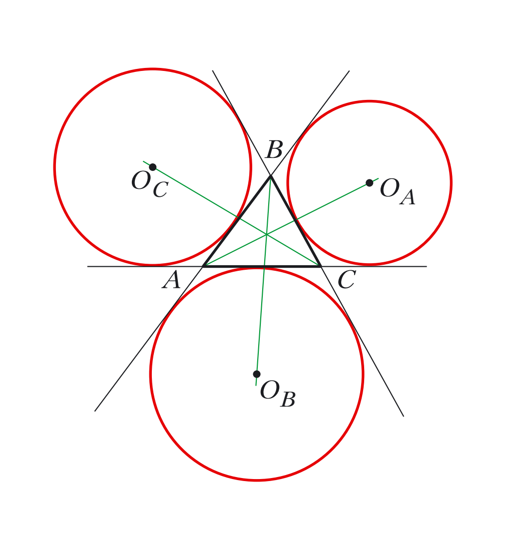


Рис. 38



Любой треугольник имеет три вневписанные окружности. На рисунке 38 их центры обозначены O_A, O_B и O_C. Радиусы этих окружностей обозначим соответственно r_a, r_b и r_c.

По свойству касательных, проведённых к окружности через одну точку, имеем: $CK = CN$, $AK = AM$ (см. рис. 37). Тогда $AC = AM + CN$. Следовательно, периметр треугольника ABC равен сумме $BM + BN$. Однако $BM = BN$. Тогда $BM = BN = p$, где p — полупериметр треугольника ABC.

Покажем, как можно выразить радиус вневписанной окружности через стороны треугольника.

Имеем:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OCB} - S_{OAC} =$$

$$= \frac{1}{2} OM \cdot AB + \frac{1}{2} ON \cdot BC - \frac{1}{2} OK \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2} r_b (c + a - b) =$$

$$= r_b \cdot \frac{a + b + c - 2b}{2} =$$

$$= r_b \cdot \frac{2p - 2b}{2} = r_b (p - b).$$

Отсюда $r_b = \dfrac{S}{p - b}$, где S — площадь треугольника ABC.

Аналогично можно показать, что $r_a = \dfrac{S}{p - a}$, $r_c = \dfrac{S}{p - c}$.

Упражнения

1. Докажите, что $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

2. Докажите, что площадь S прямоугольного треугольника вычисляется по формуле $S = r_c \cdot r$, где r_c — радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы треугольника, r — радиус вписанной окружности данного треугольника.

3. В равносторонний треугольник со стороной a вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что отрезок касательной, принадлежащий треугольнику, равен b. Найдите площадь треугольника, который эта касательная отсекает от равностороннего треугольника.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне AD, $\angle ADC = 135°$, $\angle BAD = \angle BCD = 60°$. Докажите, что диагональ AC является биссектрисой угла BAD.

Указание. Докажите, что точка C – центр вневписанной окружности треугольника ABD.

5. В треугольнике ABC угол B равен $120°$. Отрезки AN, CF и BK – биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что угол NKF равен $90°$.
Указание. На продолжении стороны AB за точку B отметим точку M. Тогда $\angle MBC = \angle KBC = 60°$, т. е. BC – биссектриса внешнего угла MBK треугольника ABK. Отсюда следует, что точка N – центр вневписанной окружности треугольника ABK. Аналогично можно доказать, что точка F – центр вневписанной окружности треугольника BCK.

6. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1 см. На сторонах AB и BC отметили точки M и N соответственно так, что периметр треугольника MBN равен 2 см. Найдите угол MDN.
Указание. Докажите, что точка D – центр вневписанной окружности треугольника MBN.

Задание № 1 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Какое из равенств верно?
А) $\cos(180° - \alpha) = \sin\alpha$ В) $\sin(180° - \alpha) = \cos\alpha$
Б) $\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha$ Г) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

2. Какое из неравенств верно?
А) $\sin 100° \cos 110° > 0$ В) $\sin 100° \cos 110° < 0$
Б) $\sin 100° \cos 10° < 0$ Г) $\sin 100° \cos 90° > 0$

3. Чему равна третья сторона треугольника, если две его стороны равны 3 см и 8 см, а угол между ними равен 120°?
А) $\sqrt{97}$ см Б) 7 см В) 9 см Г) $\sqrt{32}$ см

4. Каким является угол, лежащий против большей стороны треугольника со сторонами 4 см, 7 см и 9 см?
А) острым В) прямым
Б) тупым Г) невозможно установить

5. Угол между двумя сторонами треугольника, одна из которых на 10 см больше другой, равен 60°, а третья сторона равна 14 см. Какова длина наибольшей стороны треугольника?
А) 16 см Б) 14 см В) 18 см Г) 15 см

6. Диагонали параллелограмма равны 17 см и 19 см, а его стороны относятся как 2 : 3. Чему равен периметр параллелограмма?
А) 25 см Б) 30 см В) 40 см Г) 50 см

7. В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$ см, $\angle C = 30°$, $\angle A = 45°$. Чему равна сторона BC?
А) $8\sqrt{2}$ см Б) $4\sqrt{2}$ см В) $16\sqrt{2}$ см Г) $12\sqrt{2}$ см

8. Чему равно отношение $AC : BC$ сторон треугольника ABC, если $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$?
А) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Б) $\sqrt{3}$ В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Г) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

9. В треугольнике ABC $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135°$. Чему равен диаметр окружности, описанной около треугольника?
А) 4 см Б) 8 см В) 16 см Г) 2 см

10. Какое наибольшее значение может принимать площадь треугольника со сторонами 8 см и 12 см?
А) 96 см^2 В) 24 см^2
Б) 48 см^2 Г) невозможно установить

11. Чему равна сумма радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 25 см, 33 см и 52 см?
А) 36 см Б) 30 см В) 32,5 см Г) 38,5 см

12. Две стороны треугольника равны 11 см и 23 см, а медиана, проведённая к третьей стороне, — 10 см. Чему равна неизвестная сторона треугольника?

А) 15 см Б) 30 см В) 25 см Г) 20 см

Итоги главы 1

Косинус и синус

Косинусом и синусом угла α ($0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$), которому соответствует точка M единичной полуокружности, называют соответственно абсциссу и ординату точки M.

Тангенс

Тангенсом угла α, где $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ и $\alpha \neq 90^\circ$, называют отношение $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Котангенс

Котангенсом угла α, где $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, называют отношение $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Следствие из теоремы косинусов

Пусть a, b и c — стороны треугольника, причём a — его наибольшая сторона. Если $a^2 < b^2 + c^2$, то треугольник остроугольный. Если $a^2 > b^2 + c^2$, то треугольник тупоугольный. Если $a^2 = b^2 + c^2$, то треугольник прямоугольный.

Лемма о хорде окружности

Хорда окружности равна произведению диаметра на синус любого вписанного угла, опирающегося на эту хорду.

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Формулы для нахождения площади треугольника

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ **— формула Герона**

$$S=\frac{abc}{4R}$$

$$S=pr$$

Формула для нахождения радиуса окружности, вписанной в треугольник

$$r=\frac{S}{p}$$

Формулы для нахождения радиуса окружности, описанной около треугольника

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$R=\frac{abc}{4S}$$

Площадь многоугольника, описанного около окружности

Площадь многоугольника, описанного около окружности, равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности.

Глава 2. Правильные многоугольники

В этой главе вы узнаете, какие многоугольники называют правильными. Изучите свойства правильных многоугольников. Научитесь с помощью циркуля и линейки строить некоторые их виды. Научитесь находить радиусы вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника, длину дуги окружности, площади сектора и сегмента круга.

§ 6. Правильные многоугольники и их свойства

Определение

Многоугольник называют правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.

С некоторыми правильными многоугольниками вы уже знакомы: равносторонний треугольник — это правильный треугольник, квадрат — это правильный четырёхугольник. На рисунке 39 изображены правильные пятиугольник и восьмиугольник.

Ознакомимся с некоторыми свойствами, которыми обладают все правильные n-угольники.

Теорема 6.1

Правильный многоугольник является выпуклым многоугольником.

С доказательством этой теоремы вы можете ознакомиться на с. 57.

Каждый угол правильного n-угольника равен $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Действительно, поскольку сумма углов выпуклого n-угольника равна $180^\circ(n-2)$ и все они равны, то каждый из них равен $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

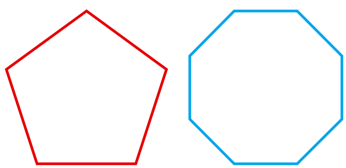
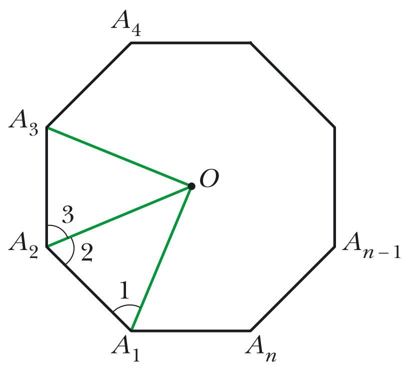
В правильном треугольнике существует точка, равноудалённая от всех его вершин и от всех его сторон. Это точка пересечения биссектрис правильного треугольника. Точка пересечения диагоналей квадрата также обладает аналогичным свойством. То, что в любом правильном многоугольнике существует точка, равноудалённая от всех его вершин и от всех его сторон, подтверждает следующая теорема.

Теорема 6.2

Любой правильный многоугольник является одновременно вписанным в окружность и описанным около окружности, причём центры описанной и вписанной окружностей совпадают.

Доказательство

На рисунке 40 изображён правильный n-угольник $A_1A_2A_3...A_n$. Докажем, что в него можно вписать и вокруг него можно описать окружности.

Рис. 39	Рис. 40
	

Проведём биссектрисы углов A_1 и A_2. Пусть O — точка их пересечения. Соединим точки O и A_3. В треугольниках OA_1A_2 и OA_2A_3 имеем: $\angle 2 = \angle 3$, $A_1A_2 = A_2A_3$ и OA_2 — общая сторона. Поэтому эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Кроме того, углы 1 и 2 равны как половины равных углов. Отсюда треугольник OA_1A_2 — равнобедренный, следовательно, равнобедренным является треугольник OA_2A_3. Поэтому $OA_1 = OA_2 = OA_3$.

Соединяя точку O с вершинами A_4, A_5, ..., A_{n-1}, A_n, аналогично можно показать, что $OA_3 = OA_4 = ... = OA_{n-1} = OA_n$.

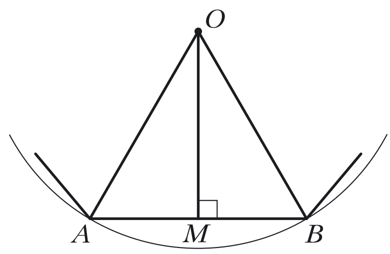
Таким образом, для многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ существует точка, равноудалённая от всех его вершин. Это точка O — центр описанной окружности.

Так как равнобедренные треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 равны, то равны и их высоты, проведённые из вершины O. Отсюда делаем вывод: точка O равноудалена от всех сторон многоугольника. Следовательно, точка O — центр вписанной окружности. ◄

Точку, которая является центром описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника, называют **центром правильного многоугольника**.

На рисунке 41 изображён фрагмент правильного n-угольника с центром O и стороной AB, длину которой обозначим a_n. Угол AOB называют **центральным углом правильного многоугольника**. Понятно, что $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$.

Рис. 41



В равнобедренном треугольнике AOB проведём высоту OM (см. рис. 41). Тогда $\angle AOM = \angle BOM = \frac{180^\circ}{n}$, $AM = MB = \frac{a_n}{2}$. В треугольнике OMB получаем: $OB = \dfrac{MB}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = \dfrac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ и $OM = \dfrac{MB}{\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}} = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.

Отрезки OB и OM — радиусы описанной и вписанной окружностей правильного n-угольника. Если их длины обозначить R_n и r_n соответственно, то полученные результаты можно записать в виде формул:

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$$

$$r_n = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$$

Подставив в эти формулы вместо n числа 3, 4, 6, получим формулы для нахождения радиусов описанной и вписанной окружностей для правильных треугольника, четырёхугольника и шестиугольника.

Количество сторон правильного n-угольника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радиус описанной окружности	$R_3 = \frac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a_6$
Радиус вписанной окружности	$r_3 = \frac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a_4}{2}$	$r_6 = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$

Формула $R_6 = a_6$ показывает, что сторона правильного шестиугольника равна радиусу его описанной окружности. Отсюда получаем алгоритм построения правильного шестиугольника: от произвольной точки M окружности надо последовательно откладывать хорды, равные радиусу (рис. 42). Таким образом получаем вершины правильного шестиугольника.

Соединив через одну вершины правильного шестиугольника, получим правильный треугольник (рис. 43).

Для построения правильного четырёхугольника достаточно в окружности провести два перпендикулярных диаметра AC и BD (рис. 44). Тогда четырёхугольник $ABCD$ – квадрат (докажите это самостоятельно).

Рис. 42

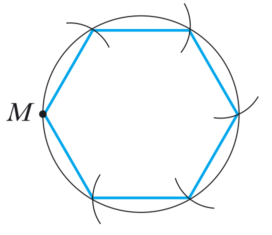


Рис. 43

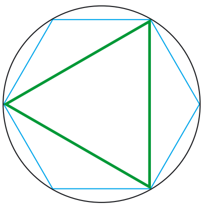
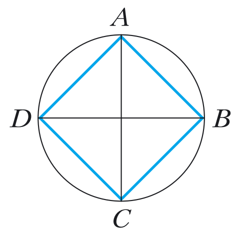
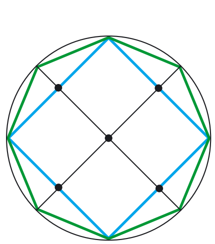


Рис. 44

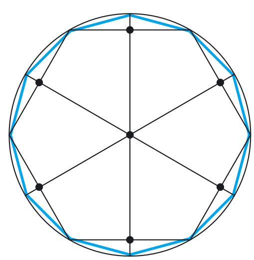


Если уже построен правильный n-угольник, то легко построить правильный $2n$-угольник. Для этого надо найти середины всех сторон n-угольника и провести радиусы описанной окружности через полученные точки. Тогда концы радиусов и вершины данного n-угольника будут вершинами правильного $2n$-угольника. На рисунках 45, *а* и *б* показано построение правильных восьмиугольника и двенадцатиугольника.

Рис. 45



а



б

Задача 1. Существует ли правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 155°; 2) 177°? В случае утвердительного ответа укажите количество сторон этого многоугольника.

Решение

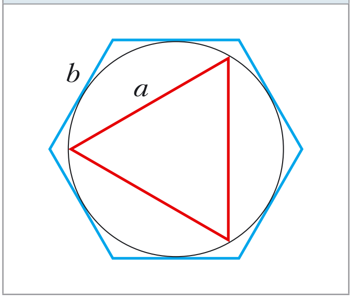
1) Пусть n — количество сторон искомого правильного многоугольника. С одной стороны, сумма его углов равна $180°(n-2)$. С другой стороны, эта сумма равна $155°n$. Следовательно, $180°(n-2)=155°n$; $25°n=360°$; $n=14{,}4$. Так как n должно быть натуральным числом, то такого правильного многоугольника не существует.

2) $180°(n-2)=177°n$; $180°n-360°=177°n$; $n=120$.

Ответ: 1) не существует; 2) существует, это — стодвадцатиугольник. ◄

Задача 2. В окружность вписан правильный треугольник со стороной 18 см. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

Рис. 46



Решение. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника (рис. 46), вычисляется по формуле $R_3=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, где a — сторона треугольника. Следовательно, $R_3=\frac{18\sqrt{3}}{3}=6\sqrt{3}$ (см).

По условию радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен радиусу окружности, описанной около правильного треугольника, т. е. $r_6=R_3=6\sqrt{3}$ см. Так как $r_6=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, где b — сторона правильного шестиугольника, то $b=\frac{2r_6}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=12$ (см).

Ответ: 12 см. ◄

1. Какой многоугольник называют правильным?
2. Какое другое название имеет правильный треугольник?
3. Какое другое название имеет правильный четырёхугольник?
4. Около какого правильного многоугольника можно описать окружность?
5. В какой правильный многоугольник можно вписать окружность?
6. Как расположены друг относительно друга центры вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника?
7. Что называют центром правильного многоугольника?

8. Запишите формулы радиусов вписанной и описанной окружностей правильного n-угольника, треугольника, четырёхугольника, шестиугольника.
9. Опишите построение правильного шестиугольника.
10. Опишите построение правильного четырёхугольника.
11. Как, имея построенный правильный n-угольник, можно построить правильный $2n$-угольник?

Практические задания

177. Начертите окружность, радиус которой равен 3 см. Постройте вписанный в эту окружность:
1) правильный шестиугольник;
2) правильный треугольник;
3) правильный двенадцатиугольник.

178. Начертите окружность, радиус которой равен 2,5 см. Постройте вписанный в эту окружность:
1) правильный четырёхугольник;
2) правильный восьмиугольник.

Упражнения

179. Найдите углы правильного n-угольника, если: 1) $n = 6$; 2) $n = 9$; 3) $n = 15$.

180. Найдите углы правильного: 1) восьмиугольника; 2) десятиугольника.

181. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 60°; 2) 171°?

182. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 90°; 2) 108°?

183. Существует ли правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 140°; 2) 130°?

184. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если угол, смежный с углом многоугольника, составляет $\frac{1}{9}$ угла многоугольника?

185. Определите количество сторон правильного многоугольника, если его угол на 168° больше смежного с ним угла.

186. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, вписанный в окружность, если градусная мера дуги описанной окружности, которую стягивает сторона многоугольника, равна: 1) 90°; 2) 24°?

187. Найдите количество сторон правильного многоугольника, центральный угол которого равен: 1) 120°; 2) 72°.

188. Пусть a_3 – сторона правильного треугольника, R и r – соответственно радиусы описанной и вписанной его окружностей. Заполните таблицу (длины даны в сантиметрах):

a_3	R	r
$6\sqrt{3}$		
	$4\sqrt{3}$	
		2

189. Пусть a_4 – сторона квадрата, R и r – соответственно радиусы описанной и вписанной его окружностей. Заполните таблицу (длины даны в сантиметрах):

a_4	R	r
8		
	4	
		$\sqrt{2}$

190. Высота правильного треугольника равна 15 см. Чему равен радиус: 1) описанной окружности; 2) вписанной окружности?

191. Диагональ квадрата равна $6\sqrt{2}$ см. Чему равен радиус: 1) описанной окружности; 2) вписанной окружности?

192. Радиус окружности равен 12 см. Найдите сторону вписанного в эту окружность правильного: 1) шестиугольника; 2) двенадцатиугольника.

193. Радиус окружности равен $8\sqrt{3}$ см. Найдите сторону описанного около этой окружности правильного шестиугольника.

194. Докажите, что радиус окружности, описанной около правильного треугольника, в два раза больше радиуса окружности, вписанной в этот треугольник.

195. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, на 4 см больше радиуса вписанной окружности. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей и сторону треугольника.

196. Сторона правильного многоугольника равна a, радиус описанной окружности равен R. Найдите радиус вписанной окружности.

197. Радиусы вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника равны соответственно r и R. Найдите сторону многоугольника.

198. Сторона правильного многоугольника равна a, радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиус описанной окружности.

199. Около окружности описан правильный шестиугольник со стороной $4\sqrt{3}$ см. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

200. В окружность вписан квадрат со стороной $6\sqrt{2}$ см. Найдите сторону правильного треугольника, описанного около этой окружности.

201. Диаметр круга равен 16 см. Можно ли из него вырезать квадрат со стороной 12 см?

202. Каким должен быть наименьший диаметр круглого бревна, чтобы из него можно было изготовить брус, поперечным сечением которого является правильный треугольник со стороной 15 см?

203. Каким должен быть наименьший диаметр круглого бревна, чтобы из него можно было изготовить брус, поперечным сечением которого является квадрат со стороной 14 см?

204. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого на 36° больше его центрального угла?

205. Угол между радиусами вписанной окружности правильного многоугольника, проведёнными в точки касания этой окружности с соседними сторонами многоугольника, равен 20°. Найдите количество сторон многоугольника.

206. Докажите, что все диагонали правильного пятиугольника равны.

207. Докажите, что каждая диагональ правильного пятиугольника параллельна одной из его сторон.

208. Общая хорда двух пересекающихся окружностей является стороной правильного треугольника, вписанного в одну окружность, и стороной квадрата, вписанного в другую окружность. Длина этой хорды равна a. Найдите расстояние между центрами окружностей, если они лежат: 1) по разные стороны от хорды; 2) по одну сторону от хорды.

209. Общая хорда двух пересекающихся окружностей является стороной правильного треугольника, вписанного в одну окружность, и стороной правильного шестиугольника, вписанного в другую окружность. Длина этой хорды равна a. Найдите расстояние между центрами окружностей, если они лежат: 1) по разные стороны от хорды; 2) по одну сторону от хорды.

210. В окружность вписан правильный треугольник, и около неё описан правильный треугольник. Найдите отношение сторон этих треугольников.

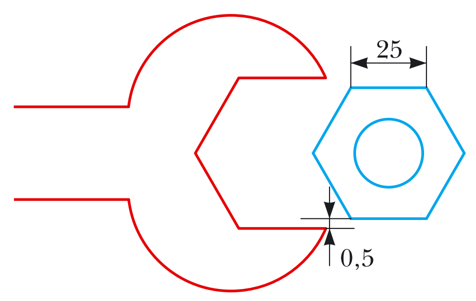
211. В окружность вписан правильный шестиугольник, и около неё описан правильный шестиугольник. Найдите отношение сторон этих шестиугольников.

212. Докажите, что сторона правильного восьмиугольника равна $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, где R — радиус его описанной окружности.

213. Докажите, что сторона правильного двенадцатиугольника равна $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, где R — радиус его описанной окружности.

214. Какая ширина проёма должна быть у ключа для шестигранной гайки, основания которой имеют форму правильного шестиугольника (рис. 47), если ширина грани гайки равна 25 мм, а зазор между гранями гайки и ключа — 0,5 мм?

Рис. 47



215. Найдите площадь правильного восьмиугольника, если радиус описанной около него окружности равен R.

216. Найдите диагонали и площадь правильного шестиугольника, сторона которого равна a.

217. Углы квадрата со стороной 6 см срезали так, что получили правильный восьмиугольник. Найдите сторону полученного восьмиугольника.

218. Углы правильного треугольника со стороной 24 см срезали так, что получили правильный шестиугольник. Найдите сторону полученного шестиугольника.

219. Найдите диагонали правильного восьмиугольника, сторона которого равна a.

220. В правильном двенадцатиугольнике, сторона которого равна a, последовательно соединили середины шести сторон, взятых через одну. Найдите сторону образовавшегося правильного шестиугольника.

221. В правильном восьмиугольнике, сторона которого равна a, последовательно соединили середины четырёх сторон, взятых через одну. Найдите сторону образовавшегося квадрата.

222. Форму каких равных правильных многоугольников могут иметь дощечки паркета, чтобы ими можно было выстлать пол?

223. Дан правильный шестиугольник, сторона которого равна 1. Пользуясь только линейкой, постройте отрезок длиной $\sqrt{7}$.

Упражнения для повторения

224. Окружность разделена на пять равных дуг: $\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE = \cup AE$. Найдите: 1) $\angle BAC$; 2) $\angle BAD$; 3) $\angle BAE$; 4) $\angle CAD$; 5) $\angle DAE$.

225. На одной стороне угла с вершиной в точке A отметили точки B и C (точка B лежит между точками A и C), а на другой — точки D и E (точка D лежит между точками A и E), причём $AB = 28$ см, $BC = 8$ см, $AD = 24$ см, $AE = 42$ см, $BE = 21$ см. Найдите отрезок CD.

226. Основание равнобедренного тупоугольного треугольника равно 24 см, а радиус окружности, описанной около него, — 13 см. Найдите площадь треугольника.

227. Через точку A к окружности проведены две касательные. Расстояние от точки A до точки касания равно 12 см, а расстояние между точками касания — 14,4 см. Найдите радиус окружности.

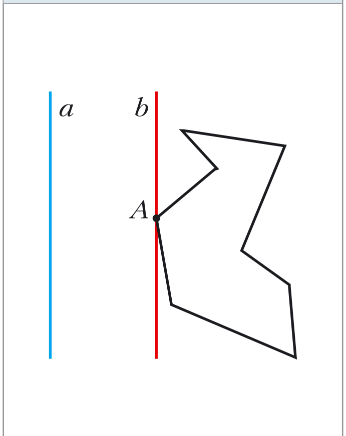
Когда сделаны уроки

О построении правильных *n*-угольников

Докажем, что любой правильный n-угольник является выпуклым многоугольником. Для этого достаточно показать, что в любом многоугольнике есть хотя бы один угол, меньший 180°. Тогда из того, что в правильном n-угольнике все углы равны, будет следовать, что каждый из них меньше 180°, т. е. многоугольник будет выпуклым.

Рассмотрим произвольный многоугольник и прямую a, не имеющую с ним общих точек (рис. 48). Из каждой вершины многоугольника опустим перпендикуляр на прямую a.

Рис. 48



Сравнив длины этих перпендикуляров, мы сможем выбрать вершину многоугольника, наименее удалённую от прямой a (если таких вершин несколько, то выберем любую из них). Пусть этим свойством обладает вершина A. Через точку A проведём прямую b, параллельную прямой a (см. рис. 48). Тогда угол A многоугольника лежит в одной полуплоскости относительно прямой b. Следовательно, $\angle A < 180°$.

Вы умеете с помощью циркуля и линейки строить правильный четырёхугольник, а значит, и восьми-, шестнадцати-, тридцатидвухугольник, т. е. любой 2^n-угольник (n — натуральное число, $n > 1$). Умение строить правильный треугольник даёт возможность построить следующую цепочку из правильных многоугольников: шести-, двенадцати-, двадцатичетырёхугольник и т. д., т. е. любой $3 \cdot 2^n$-угольник (n — натуральное число).

Задачу построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки изучали ещё древнегреческие геометры. В частности, помимо указанных выше многоугольников, они умели строить правильные пятиугольник и пятнадцатиугольник — задачи довольно непростые.

Древние учёные, умевшие строить любой из правильных n-угольников, где $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, пытались решить эту задачу и для $n = 7, 9$. Им это не удалось. Вообще более двух тысяч лет никто не мог продвинуться в решении этой проблемы. Лишь в 1796 г. великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) смог доказать, что циркулем и линейкой построить правильные семиугольник и девятиугольник нельзя. В 1801 г. Гаусс показал, что циркулем и линейкой можно построить правильный n-угольник тогда и только тогда, когда $n = 2^k$, где $k \in N$, $k > 1$, или $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$, где k — целое неотрицательное число, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — разные простые числа вида $2^{2^m} + 1$, которые называют простыми числами Ферма. Сейчас известны лишь пять простых чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65 537.

Пьер Ферма́
(1601–1665)

Французский математик. Один из основателей теории чисел. Автор ряда выдающихся трудов в разных областях математики, которые оказали значительное влияние на дальнейшее развитие математики.

Гауссу удалось построить правильный семнадцатиугольник. Он придавал этому открытию столь большое значение, что завещал увековечить семнадцатиугольник на своём надгробии. На могильной плите Гаусса этого рисунка нет, но сам памятник стоит на семнадцатиугольном постаменте.

§ 7. Длина окружности. Площадь круга

На рисунке 49 изображены правильные четырёхугольник, восьмиугольник и шестнадцатиугольник, вписанные в окружность.

Рис. 49

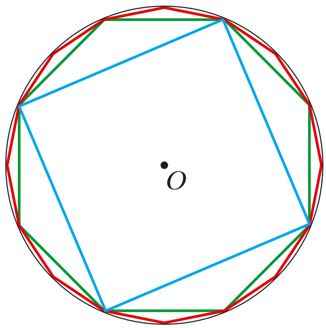
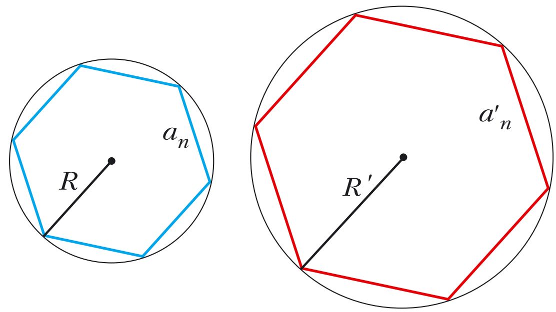


Рис. 50



Мы видим, что при увеличении количества сторон правильного n-угольника его периметр P_n всё меньше и меньше отличается от длины C описанной окружности.

Так, для нашего примера можно записать:

$C - P_4 > C - P_8 > C - P_{16}$.

При неограниченном увеличении количества сторон правильного многоугольника его периметр будет как угодно мало отличаться от длины окружности. Это означает, что разность $C - P_n$ можно сделать меньшей, чем, например, 10^{-6}, 10^{-9}, и, вообще, меньшей любого положительного числа.

Рассмотрим два правильных n-угольника со сторонами a_n и a'_n, вписанных в окружности радиусов R и R' соответственно (рис. 50). Тогда их периметры P_n и P'_n вычисляют по формулам:

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Отсюда

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (*)$$

Это равенство справедливо при любом значении n (n — натуральное, $n \geqslant 3$). При неограниченном увеличении значения n периметры P_n и P'_n соответственно будут сколь угодно мало отличаться от длин C и C' описанных окружностей. Тогда при неограниченном увеличении n отношение $\frac{P_n}{P'_n}$ будет сколь угодно мало отличаться от отношения $\frac{C}{C'}$. С учётом равенства (*) приходим к выводу, что число $\frac{2R}{2R'}$ сколь угодно мало отличается от числа $\frac{C}{C'}$. А это значит, что $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$, или $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Последнее равенство означает, что ***для любой окружности отношение длины окружности к диаметру есть одно и то же число***.

Из курса математики 6 класса вы знаете, что это число принято обозначать греческой буквой π (читают: «пи»).

Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ получаем формулу для вычисления длины окружности

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

Число π иррациональное, а значит, оно не может быть представлено в виде конечной десятичной дроби. Обычно при решении задач в качестве приближённого значения π принимают число 3,14.

Великий древнегреческий учёный Архимед (III в. до н. э.), выразив через диаметр описанной окружности периметр правильного девяностошестиугольника, установил, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Отсюда и следует, что $\pi \approx 3{,}14$.

С помощью современных компьютеров и специальных программ можно вычислить число π с большой точностью. Приведём запись числа π с 47 цифрами после запятой:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510...$.

В 1992 г. число π вычислили с точностью до 1 011 196 691 цифры после запятой. Этот факт был занесён в Книгу рекордов Гиннесса. В 2016 г. было вычислено уже более 22 триллионов знаков этого числа.

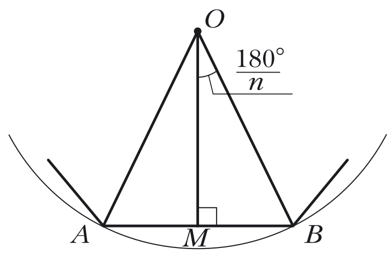
Найдём формулу для вычисления **длины дуги окружности** с градусной мерой $n°$. Поскольку градусная мера всей окружности равна 360°, то длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тогда длина l дуги в $n°$ вычисляется по формуле

$$\boxed{l = \frac{\pi R n}{180}}$$

Выведем формулу для вычисления площади круга.

Обратимся к рисунку 49. Мы видим, что при увеличении количества сторон правильного n-угольника его площадь S_n всё меньше и меньше отличается от площади S круга. При неограниченном увеличении количества сторон его площадь стремится к площади круга.

Рис. 51



На рисунке 51 изображён фрагмент правильного n-угольника с центром в точке O, со стороной $AB = a_n$ и радиусом описанной окружности, равным R. Опустим перпендикуляр OM на сторону AB. Имеем: $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} a_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}$.

Поскольку радиусы, проведённые в вершины правильного n-угольника, разбивают его на n равных треугольников, то площадь n-угольника S_n в n раз больше площади треугольника AOB. Тогда

$$S_n = n \cdot S_{AOB} = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Отсюда

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}, \qquad (**)$$

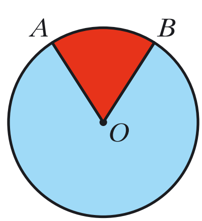
где P_n — периметр данного правильного n-угольника.

При неограниченном увеличении значения n величина $\frac{180^\circ}{n}$ будет сколь угодно мало отличаться от 0°, а следовательно, $\cos \frac{180^\circ}{n}$ будет стремиться к 1. Периметр P_n будет стремиться к длине C окружности, а площадь S_n — к площади S круга. Отсюда с учётом равенства (**) можно записать: $S = \frac{1}{2} C \cdot R$.

Из этого равенства получаем формулу для нахождения **площади круга**:

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

Рис. 52



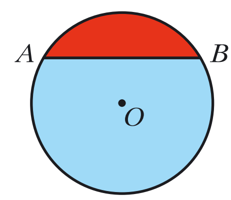
На рисунке 52 радиусы OA и OB делят круг на две части, закрашенные разными цветами. Каждую из этих частей вместе с радиусами OA и OB называют **круговым сектором** или **сектором**.

Понятно, что круг радиуса R можно разделить на 360 равных секторов, каждый из которых будет содержать дугу в 1°. Площадь такого сектора равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Тогда **площадь S сектора**, содержащего дугу окружности в n°, вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

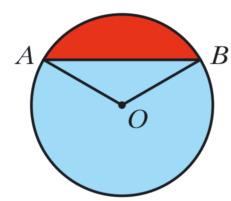
На рисунке 53 хорда AB делит круг на две части, закрашенные разными цветами. Каждую из этих частей вместе с хордой AB называют **круговым сегментом** или **сегментом**. Хорду AB при этом называют **основанием сегмента**.

Рис. 53



Чтобы найти площадь сегмента, закрашенного красным цветом (рис. 54), надо из площади сектора, содержащего хорду AB, вычесть площадь треугольника AOB (точка O – центр круга). Чтобы найти площадь сегмента, закрашенного голубым цветом, надо к площади сектора, не содержащего хорду AB, прибавить площадь треугольника AOB.

Рис. 54



Если хорда AB является диаметром круга, то она делит круг на два сегмента, которые называют **полукругами**. **Площадь S полукруга** вычисляют по формуле $S = \frac{\pi R^2}{2}$, где R – радиус круга.

<u>**Задача 1.**</u> Длина дуги окружности, радиус которой 25 см, равна π см. Найдите градусную меру дуги.

Решение. Из формулы $l = \frac{\pi R n}{180}$ получаем $n = \frac{180\, l}{\pi R}$. Следовательно, искомая градусная мера $n^\circ = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25}\right)^\circ = 7{,}2^\circ$.

Ответ: 7,2°. ◄

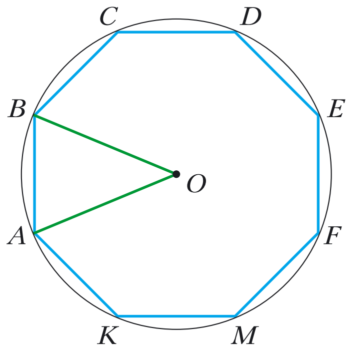
<u>**Задача 2.**</u> В окружность с центром O, радиус которой равен 8 см, вписан правильный восьмиугольник $ABCDEFMK$ (рис. 55). Найдите площади сектора и сегмента, содержащих дугу AB.

Решение. Угол AOB — центральный угол правильного восьмиугольника, поэтому $\angle AOB = \frac{360°}{8} = 45°$.

Тогда площадь сектора, которую требуется найти, вычисляется так: $S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45}{360} = 8\pi$ (см^2), а площадь сегмента — так: $S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{\Delta AOB} = 8\pi - \frac{1}{2} OA^2 \sin \angle AOB = 8\pi - 16\sqrt{2}$ (см^2).

Ответ: 8π см^2, $8\pi - 16\sqrt{2}$ см^2. ◄

Рис. 55



1. Какое отношение обозначают буквой π?
2. Назовите приближённое значение числа π с точностью до сотых.
3. По какой формуле вычисляют длину окружности?
4. По какой формуле вычисляют длину дуги окружности?
5. По какой формуле вычисляют площадь круга?
6. Объясните, какую геометрическую фигуру называют круговым сектором.
7. По какой формуле вычисляют площадь кругового сектора?
8. Объясните, какую геометрическую фигуру называют круговым сегментом.
9. Объясните, как можно найти площадь кругового сегмента.

Упражнения

228. Найдите длину окружности, диаметр которой равен: 1) 1,2 см; 2) 3,5 см.

229. Найдите длину окружности, радиус которой равен: 1) 6 см; 2) 1,4 м.

230. Найдите площадь круга, радиус которого равен: 1) 4 см; 2) 14 дм.

231. Найдите площадь круга, диаметр которого равен: 1) 20 см; 2) 3,2 дм.

232. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна l.

233. Вычислите площадь поперечного сечения дерева, которое в обхвате составляет 125,6 см.

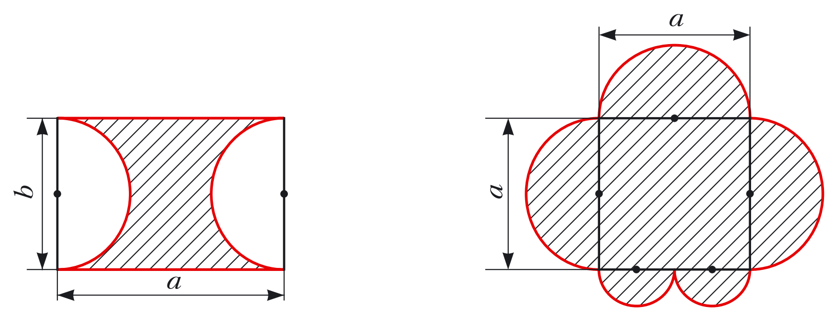
234. Как изменится длина окружности, если её радиус:
1) увеличить в 2 раза;
2) уменьшить в 3 раза?

235. Длина земного экватора приближённо равна 40 000 000 м. Считая, что Земля имеет форму шара, найдите её радиус в километрах.

236. Самый большой оптический телескоп (рефлектор) в России находится в горах Западного Кавказа (Архыз). Диаметр обода его зеркала равен 6 м. Самый большой в мире оптический телескоп находится в обсерватории Калифорнийского университета на Гавайях (США). Диаметр обода его зеркала составляет 10 м. Найдите отношение длин ободов зеркал российского и американского телескопов.

237. Вычислите длину красной линии, изображённой на рисунке 56.

Рис. 56

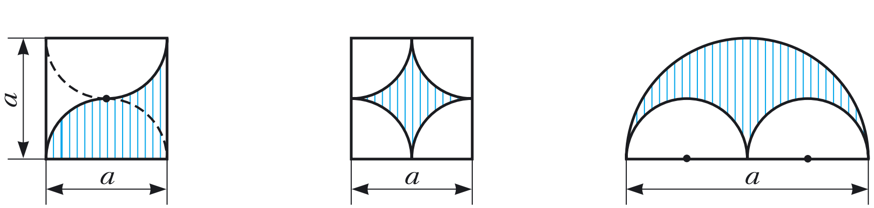


а б

238. Северный полярный круг пересекает границы России в точках, восточная долгота которых равна 29° и 169°. Найдите длину дуги Северного полярного круга, принадлежащую России, если с точностью до сотен километров длина окружности Северного полярного круга равна 15 900 км. Ответ округлите с точностью до сотен километров.

239. Вычислите площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 57.

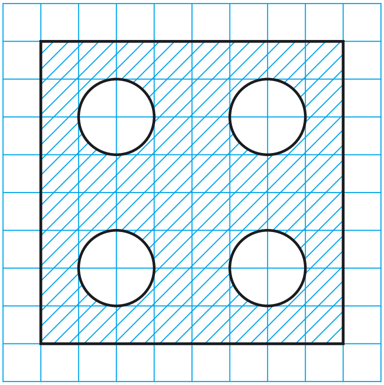
Рис. 57



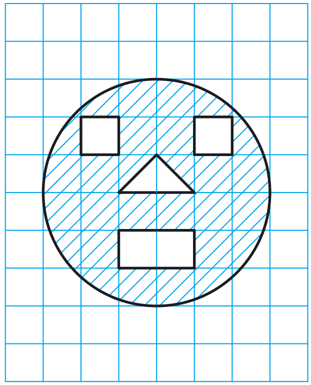
а б в

240. Вычислите площадь заштрихованной фигуры (рис. 58), если длина стороны клетки равна a.

Рис. 58



а



б

241. Продаются блинчики двух видов: диаметром 30 см и 20 см. Если толщина всех блинчиков одинакова, то в каком случае покупатель съест больше: когда съест один большой блинчик или два меньших?

242. Найдите длину окружности, описанной около правильного треугольника со стороной a.

243. Найдите длину окружности, вписанной в квадрат со стороной a.

244. Найдите площадь круга, описанного около квадрата со стороной a.

245. Найдите площадь круга, вписанного в правильный шестиугольник со стороной a.

246. Найдите площадь круга, вписанного в правильный треугольник со стороной a.

247. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольника со сторонами a и b.

248. Найдите площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника с боковой стороной b и углом α при основании.

249. Найдите длину окружности, описанной около прямоугольника со стороной a и углом α между данной стороной и диагональю прямоугольника.

250. Радиус окружности равен 8 см. Найдите длину дуги окружности, градусная мера которой равна: 1) $4°$; 2) $320°$.

251. Длина дуги окружности равна 12π см, а её градусная мера — $27°$. Найдите радиус окружности.

252. Длина дуги окружности радиуса 24 см равна 3π см. Найдите градусную меру дуги.

253. Вычислите длину дуги экватора Земли, градусная мера которой равна 1°, если радиус экватора приближённо равен 6400 км.

254. Радиус круга равен 6 см. Найдите площадь сектора, если градусная мера его дуги равна: 1) 15°; 2) 280°.

255. Площадь сектора составляет $\frac{5}{8}$ площади круга. Найдите градусную меру его дуги.

256. Площадь сектора равна 6π дм^2. Найдите градусную меру дуги этого сектора, если радиус круга равен 12 дм.

257. Площадь сектора равна $\frac{5\pi}{4}$ см^2, а градусная мера дуги этого сектора составляет 75°. Найдите радиус круга, частью которого является данный сектор.

258. Может ли сектор круга быть его сегментом?

259. Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 5 см, а градусная мера дуги сегмента равна: 1) 45°; 2) 330°.

260. Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 2 см, а градусная мера дуги сегмента равна: 1) 60°; 2) 300°.

261. Колёса автомобиля имеют диаметр 65 см. Автомобиль едет с такой скоростью, что колёса делают ежесекундно 6 оборотов. Найдите скорость автомобиля в километрах в час. Ответ округлите до десятых.

262. Найдите длину дуги, которую описывает часовая стрелка длиной 6 см за 1 ч.

263. Найдите длину дуги, которую описывает минутная стрелка длиной 24 см за 40 мин.

264. Радиус окружности увеличили на a. Докажите, что длина окружности увеличится на величину, не зависящую от радиуса данной окружности.

265. Сторона треугольника равна 6 см, а прилежащие к ней углы равны 50° и 100°. Найдите длины дуг, на которые вершины треугольника делят описанную около него окружность.

266. Сторона треугольника равна $5\sqrt{3}$ см, а прилежащие к ней углы равны 35° и 25°. Найдите длины дуг, на которые вершины треугольника делят описанную около него окружность.

267. На катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги этой окружности, принадлежащей треугольнику, если $\angle A = 24^\circ$, $AC = 20$ см.

268. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 70°. На высоте треугольника, проведённой к основанию и равной 27 см, как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги окружности, принадлежащей треугольнику.

269. Отрезок AB разбили на n отрезков. На каждом из них как на диаметре построили полуокружность. Это действие повторили, разбив данный отрезок на m отрезков. Найдите отношение сумм длин полуокружностей, полученных в первом и втором случаях.

270. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника как на диаметре (рис. 59), равна сумме площадей полукругов, построенных на его катетах как на диаметрах.

271. Две водопроводные трубы, диаметры которых равны 30 см и 40 см, надо заменить одной трубой с такой же пропускной способностью (пропускная способность водопроводной трубы — это масса воды, которая проходит через поперечное сечение трубы за единицу времени). Каким должен быть диаметр этой трубы?

272. На сколько процентов увеличится площадь круга, если его радиус увеличить на 10 %?

273. В круг вписан квадрат со стороной a. Найдите площадь меньшего из сегментов, основанием которых является сторона квадрата.

274. Из листа жести, имеющего форму круга, вырезали правильный шестиугольник наибольшей площади. Сколько процентов жести пошло в отходы?

275. В круг вписан правильный треугольник со стороной a. Найдите площадь меньшего из сегментов, основанием которых является сторона треугольника.

276. В круговой сектор, радиус которого равен R, а центральный угол составляет 60°, вписан круг. Найдите площадь этого круга.

277. Найдите площадь розетки (заштрихованной фигуры), изображённой на рисунке 60, если сторона квадрата $ABCD$ равна a.

Рис. 59

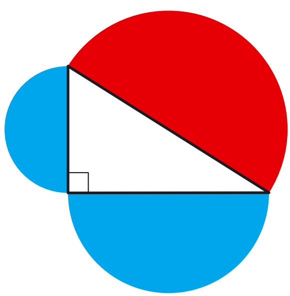
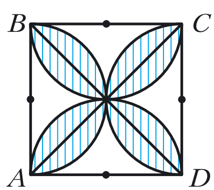


Рис. 60



278. При построении четырёх дуг с центрами в вершинах квадрата $ABCD$ и радиусами, равными стороне a квадрата, образовалась фигура, ограниченная красной линией (рис. 61). Найдите длину этой линии.

279. (Задача Гиппократа.) Около прямоугольника описали окружность и на каждой его стороне как на диаметре построили полуокружность (рис. 62*). Докажите, что сумма площадей закрашенных фигур равна площади прямоугольника.

280. Два квадрата со сторонами 1 см имеют общий центр (рис. 63). Докажите, что площадь их общей части больше, чем $\frac{\pi}{4}$.

Рис. 61

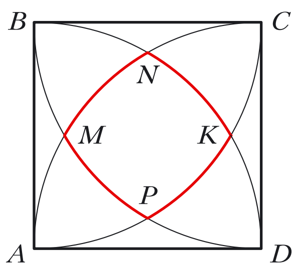


Рис. 62

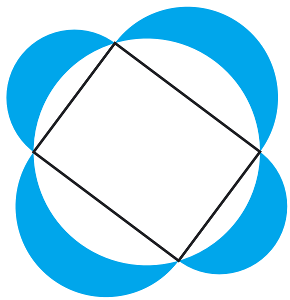
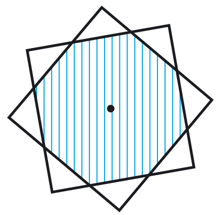


Рис. 63



Гиппократ Хиосский
(V в. до н. э.)

Древнегреческий геометр, автор первого систематического сочинения по геометрии (не дошедшего до нас), которое, вероятно, охватывало материал первых четырёх книг «Начал» Евклида.

* Фигуры, выделенные синим цветом, называют «луночками Гиппократа».

Упражнения для повторения

281. Найдите сторону ромба, если его высота равна 6 см, а угол между стороной ромба и одной из диагоналей равен 15°.

282. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ делит его сторону BC на отрезки BM и MC длиной 10 см и 14 см соответственно. На отрезки какой длины эта биссектриса делит диагональ прямоугольника?

283. Сумма углов при большем основании трапеции равна 90°. Докажите, что расстояние между серединами оснований трапеции равно полуразности оснований.

Готовимся к изучению новой темы

284. Чему равно расстояние между точками A и B координатной прямой, если:

1) A (3) и B (7); 3) A (–2) и B (–6);
2) A (–2) и B (4); 4) A (a) и B (b)?

285. Начертите на координатной плоскости отрезок AB, найдите по рисунку координаты середины отрезка и сравните их со средним арифметическим соответствующих координат точек A и B, если:

1) A (–1; –6), B (5; –6);
2) A (3; 1), B (3; 5);
3) A (3; –5), B (–1; 3).

286. Постройте на координатной плоскости треугольник ABC и найдите его стороны, если A (5; –1), B (–3; 5), C (–3; –1).

287. В какой координатной четверти находится точка:

1) A (3; –4); 3) C (–4; –5);
2) B (–3; 1); 4) D (1; 9)?

288. В какой координатной четверти находится точка M, если:

1) её абсцисса положительна, а ордината отрицательна;
2) произведение её абсциссы и ординаты – отрицательное число;
3) её абсцисса и ордината отрицательны?

289. Что можно сказать о координатах точки A, если:

1) точка A лежит на оси абсцисс;
2) точка A лежит на оси ординат;
3) точка A лежит на биссектрисе четвёртого координатного угла;
4) точка A лежит на биссектрисе третьего координатного угла;
5) точка A лежит на биссектрисе первого координатного угла?

290. Укажите координаты вершин прямоугольника $ABCD$ (рис. 64).

Когда сделаны уроки

Построение правильного пятиугольника и золотое сечение

Рассмотрим правильный пятиугольник $ABCDE$, сторона которого равна a. Пусть диагонали BE и AC пересекаются в точке M (рис. 65). Легко показать, что $AC \parallel ED$ и $BE \parallel CD$. Следовательно, четырёхугольник $EMCD$ – параллелограмм. Отсюда $MC = ED = a$.

$\Delta AMB \sim \Delta ABC$ по первому признаку подобия треугольников (докажите это самостоятельно). Отсюда $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AB}$. Поскольку $AB = a$ и $AM = AC - a$, то $\frac{a}{AC} = \frac{AC - a}{a}$. Отсюда $AC^2 - a \cdot AC - a^2 = 0$; $AC = \frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$.

Построение отрезка длиной $a\sqrt{5}$ при заданном отрезке a показано на рисунке 66.

Теперь легко построить отрезок $AC = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2}$.

Следовательно, мы можем построить по трём сторонам треугольник ABC, в котором стороны AB и BC – это стороны правильного пятиугольника, отрезок AC – его диагональ. Теперь вы сможете завершить построение правильного пятиугольника самостоятельно.

В ходе решения этой задачи было получено равенство $AC = \frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$. Отсюда следует, что отношение диагонали правильного пятиугольника к его стороне равно $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Это число принято обозначать греческой буквой ϕ и называть **золотым числом**. Более подробно о роли числа ϕ в науке и искусстве вы сможете узнать, если примете участие в работе над проектом «Золотое сечение».

Рис. 64

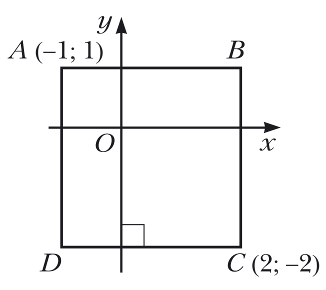


Рис. 65

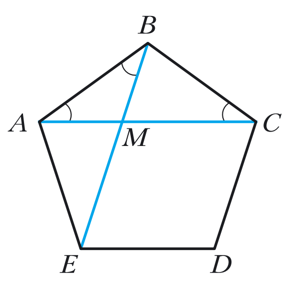
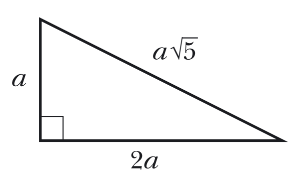


Рис. 66



Задание № 2 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Чему равно количество сторон правильного многоугольника, если его угол равен 170°?

А) 30 В) 36

Б) 32 Г) такого многоугольника не существует

2. Чему равен центральный угол правильного десятиугольника?

А) 18° В) 144°

Б) 36° Г) 10°

3. Какой наибольший центральный угол может иметь правильный многоугольник?

А) 90° В) 150°

Б) 120° Г) указать невозможно

4. В окружность вписан правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Чему равна сторона треугольника, описанного около этой окружности?

А) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ Б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ В) $a\sqrt{3}$ Г) $2a\sqrt{3}$

5. Чему равен радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, меньшая диагональ которого равна 12 см?

А) 6 см Б) $6\sqrt{3}$ см В) $2\sqrt{3}$ см Г) 12 см

6. Чему равна длина дуги окружности, градусная мера которой равна 207°, если радиус окружности 4 см?

А) $4{,}6\pi$ см В) 23π см

Б) 4,6 см Г) 23 см

7. Какую часть площади круга составляет площадь сектора, центральный угол которого равен 140°?

А) $\frac{7}{9}$ Б) $\frac{7}{12}$ В) $\frac{7}{15}$ Г) $\frac{7}{18}$

8. Вписанный в окружность угол, равный 40°, опирается на дугу длиной 8 см. Какова длина данной окружности?

А) 36 см В) 72 см

Б) 72π см Г) 36π см

9. Какой должна быть длина хорды окружности, радиус которой равен R, чтобы длины дуг, на которые концы этой хорды делят окружность, относились как $2 : 1$?

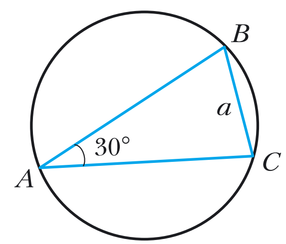
А) R Б) $2R$ В) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ Г) $R\sqrt{3}$

10. На рисунке 67 изображён вписанный в окружность треугольник ABC, $\angle A = 30°$, $BC = a$. Чему равна площадь сегмента, основание которого стягивает дугу BAC?

А) $\dfrac{a^2(2\pi + 3\sqrt{3})}{12}$ В) $\dfrac{a^2(10\pi + 3\sqrt{3})}{12}$

Б) $\dfrac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$ Г) $\dfrac{a^2(10\pi - 3\sqrt{3})}{12}$

Рис. 67



11. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 20°$, $\angle C = 30°$, $AC = 14$ см. Окружность с центром в точке A касается прямой BC. Чему равна длина дуги этой окружности, принадлежащей треугольнику ABC?

А) $\dfrac{7\pi}{18}$ см Б) $\dfrac{7\pi}{9}$ см В) $\dfrac{7\pi}{12}$ см Г) $\dfrac{7\pi}{6}$ см

12. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен $6\sqrt{3}$ см, а радиус вписанной в него окружности — 9 см. Сколько сторон имеет многоугольник?

А) 6 Б) 12 В) 9 Г) 18

Итоги главы 2

Правильный многоугольник

Многоугольник называют правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.

Свойства правильного многоугольника

- **Правильный многоугольник является выпуклым многоугольником.**
- **Любой правильный многоугольник является одновременно вписанным в окружность и описанным около окружности, причём центры описанной и вписанной окружностей совпадают.**

Формулы для нахождения радиусов описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника

$R_n = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$, где R_n — радиус описанной окружности правильного n-угольника со стороной a_n

$r_n = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$, где r_n — радиус вписанной окружности правильного n-угольника со стороной a_n

Количество сторон правильного n-угольника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радиус описанной окружности	$R_3 = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a_6$
Радиус вписанной окружности	$r_3 = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a_4}{2}$	$r_6 = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$

Длина окружности

$$C = 2\pi R$$

Длина дуги окружности в n°

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

Площадь круга

$$S = \pi R^2$$

Площадь сектора, содержащего дугу окружности в n°

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

Глава 3. Декартовы координаты

Изучая материал этой главы, вы расширите свои знания о координатной плоскости.

Вы научитесь находить длину отрезка и координаты его середины, зная координаты его концов.

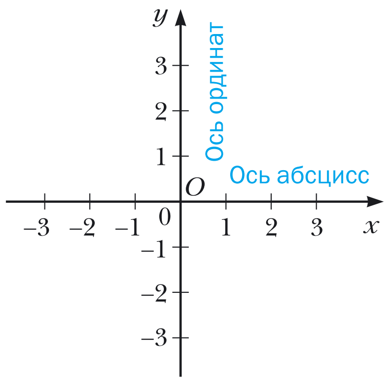
Получите представление об уравнении фигуры, выведете уравнения прямой и окружности.

Познакомитесь с методом координат, позволяющим решать геометрические задачи средствами алгебры.

§ 8. Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка

В 6 классе вы познакомились с координатной плоскостью, т. е. с плоскостью, на которой изображены две перпендикулярные координатные прямые (ось абсцисс и ось ординат) с общим началом отсчёта (рис. 68). Вы умеете отмечать на ней точки по их координатам и, наоборот, находить координаты точки, отмеченной на координатной плоскости.

Рис. 68



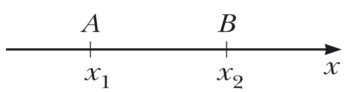
Принято координатную плоскость с осью x (осью абсцисс) и осью y (осью ординат) называть **плоскостью xy**.

Координаты точки на плоскости xy называют **декартовыми координатами** в честь французского математика Рене Декарта (см. с. 98).

Вы знаете, как находить расстояние между двумя точками, заданными своими координатами на координатной прямой. Для точек A (x_1) и B (x_2) (рис. 69):

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Рис. 69



Научимся находить расстояние между точками A $(x_1;\ y_1)$ и B $(x_2;\ y_2)$, заданными на плоскости xy.

Рассмотрим случай, когда отрезок AB не перпендикулярен ни одной из координатных осей (рис. 70).

Рис. 70

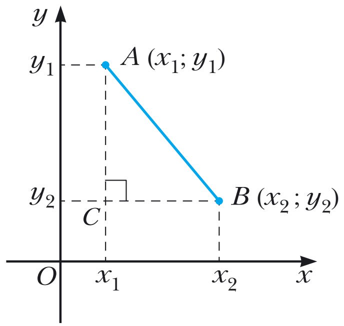
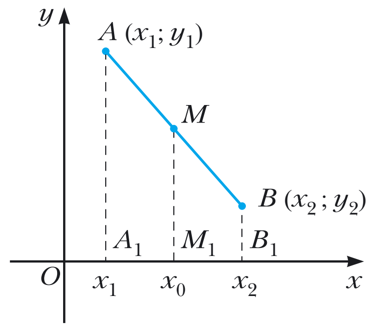


Рис. 71



Через точки A и B проведём прямые, перпендикулярные координатным осям. Получим прямоугольный треугольник ACB, в котором

$BC = |x_2 - x_1|$, $AC = |y_2 - y_1|$.

Отсюда

$AB^2 = BC^2 + AC^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Тогда формулу **расстояния между точками** $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$ можно записать так:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Докажите самостоятельно, что эта формула остаётся верной и для случая, когда отрезок AB перпендикулярен одной из осей координат.

Пусть $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$ — точки на плоскости xy. Найдём **координаты** $(x_0; y_0)$ точки M — **середины отрезка** AB.

Рассмотрим случай, когда отрезок AB не перпендикулярен ни одной из координатных осей (рис. 71). Будем считать, что $x_2 > x_1$ (случай, когда $x_2 < x_1$, рассматривается аналогично). Через точки A, M и B проведём прямые, перпендикулярные оси абсцисс, которые пересекут эту ось соответственно в точках A_1, M_1 и B_1. По теореме Фалеса $A_1M_1 = M_1B_1$, тогда $|x_0 - x_1| = |x_2 - x_0|$. Так как $x_2 > x_0 > x_1$, то можем записать: $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$. Отсюда

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Аналогично можно показать, что

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Формулы для нахождения координат середины отрезка остаются верными и для случая, когда отрезок AB перпендикулярен одной из осей координат. Докажите это самостоятельно.

Задача 1. Докажите, что треугольник с вершинами в точках A (–1; 7), B (1; 3) и C (5; 5) является равнобедренным прямоугольным.

Решение. Используя формулу расстояния между двумя точками, найдём длины сторон данного треугольника:

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20};$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20};$$

$$AC = \sqrt{(5+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Следовательно, $AB = BC$, т. е. ΔABC – равнобедренный.

Так как $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$, то ΔABC – прямоугольный. ◂

Задача 2. Точка M (2; –5) – середина отрезка AB, причём A (–1; 3). Найдите координаты точки B.

Решение. Обозначим $(x_B; y_B)$ – координаты точки B, $(x_A; y_A)$ – координаты точки A, $(x_M; y_M)$ – координаты точки M.

Поскольку $\frac{x_A + x_B}{2} = x_M$, то получаем $\frac{-1 + x_B}{2} = 2$; $-1 + x_B = 4$; $x_B = 5$.

Аналогично: $\frac{y_A + y_B}{2} = y_M$; $\frac{3 + y_B}{2} = -5$; $y_B = -13$.

Ответ: B (5; –13). ◂

Задача 3. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (2; –1), B (1; 3), C (–3; 2) и D (–2; –2) является прямоугольником.

Решение. Пусть точка M – середина диагонали AC. Тогда

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2};\ x_M = \frac{2-3}{2} = -0{,}5;\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2};\ y_M = \frac{-1+2}{2} = 0{,}5.$$

Следовательно, M (–0,5; 0,5).

Пусть точка K – середина диагонали BD. Тогда

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2};\ x_K = \frac{1-2}{2} = -0{,}5;$$

$$y_K = \frac{y_B + y_D}{2};\ y_K = \frac{3-2}{2} = 0{,}5.$$

Значит, K (–0,5; 0,5).

Следовательно, точки M и K совпадают, т. е. диагонали четырёхугольника $ABCD$ имеют общую середину. Отсюда следует, что $ABCD$ – параллелограмм. Используя формулу расстояния между двумя точками, найдём длины диагоналей параллелограмма:

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34},\ BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Значит, диагонали параллелограмма $ABCD$ равны. Отсюда следует, что этот параллелограмм является прямоугольником. ◄

1. Как найти расстояние между двумя точками, если известны их координаты?

2. Как найти координаты середины отрезка, если известны координаты его концов?

Упражнения

291. Найдите расстояние между точками A и B, если:
1) A (10; 14), B (5; 2); 2) A (–1; 2), B (4; –3).

292. Найдите расстояние между точками C и D, если:
1) C (–2; –4), D (4; –12); 2) C (6; 3), D (7; –1).

293. Вершинами треугольника являются точки A (–1; 3), B (5; 9), C (6; 2). Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

294. Докажите, что точка M (0; –1) является центром окружности, описанной около треугольника ABC, если A (6; –9), B (–6; 7), C (8; 5).

295. Докажите, что углы B и C треугольника ABC равны, если A (5; –7), B (–3; 8), C (–10; –15).

296. Найдите координаты середины отрезка BC, если:
1) B (5; 4), C (3; 2); 2) B (–2; –1), C (–1; 7).

297. Точка C – середина отрезка AB. Найдите координаты точки B, если:
1) A (3; –4), C (2; 1); 2) A (–1; 1), C (0,5; –1).

298. Точка K – середина отрезка AD. Заполните таблицу.

Точка	Координаты точки		
A	(–3; 1)	(–8; 2)	
D	(–1; –3)		(–9; 2)
K		(–4; 6)	(1; 2)

299. Найдите медиану BM треугольника, вершинами которого являются точки A (3; –2), B (2; 3) и C (7; 4).

300. Даны точки A (–2; 4) и B (2; –8). Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка AB.

301. Докажите, что треугольник с вершинами в точках A (2; 7), B (−1; 4), C (1; 2) является прямоугольным.

302. Точки A (−1; 2) и B (7; 4) являются вершинами прямоугольного треугольника. Может ли третья вершина треугольника иметь координаты: 1) (7; 2); 2) (2; −3)?

303. Лежат ли на одной прямой точки:
1) A (−2; −7), B (−1; −4) и C (5; 14);
2) D (−1; 3), E (2; 13) и F (5; 21)?
В случае утвердительного ответа укажите, какая из точек лежит между двумя другими.

304. Докажите, что точки M (−4; 5), N (−10; 7) и K (8; 1) лежат на одной прямой, и укажите, какая из них лежит между двумя другими.

305. При каком значении x расстояние между точками C (3; 2) и D (x; −1) равно 5?

306. На оси абсцисс найдите точку, равноудалённую от точек A (−1; −1) и B (2; 4).

307. Найдите координаты точки, принадлежащей оси ординат и равноудалённой от точек D (−2; −3) и E (4; 1).

308. Найдите координаты точки, которая делит отрезок AB в отношении 1 : 3, считая от точки A, если A (5; −3) и B (−3; 7).

309. Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм, A (−5; 1), B (−4; 4), C (−1; 5). Найдите координаты вершины D.

310. Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм, A (−2; −2), C (4; 1), D (−1; 1). Найдите координаты вершины B.

311. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (−2; 8), B (3; −3), C (6; 2) и D (1; 13) является параллелограммом.

312. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (−3; −2), B (−1; 2), C (1; −2) и D (−1; −6) является ромбом.

313. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (−2; 6), B (−8; −2), C (0; −8) и D (6; 0) является квадратом.

314. Точки D (1; 4) и E (2; 2) – середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. Найдите координаты вершин A и C, если B (−3; −1).

315. Найдите длину отрезка, концы которого принадлежат осям координат, а серединой является точка M (−3; 8).

316. Найдите координаты вершины C равностороннего треугольника ABC, если A (2; −3) и B (−2; 3).

317. Найдите координаты вершины E равностороннего треугольника DEF, если D (−6; 0) и F (2; 0).

318. В треугольнике ABC $AB = BC$, A (5; 9), C (1; –3), модули координат точки B равны. Найдите координаты точки B.

319. Найдите координаты всех точек C оси абсцисс таких, что треугольник ABC – равнобедренный и A (1; 1), B (2; 3).

320. Найдите координаты всех точек B оси ординат таких, что треугольник ABC – прямоугольный и A (1; 3), C (3; 7).

Упражнения для повторения

321. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 9$ см, $BC = 3$ см. На гипотенузе AB отметили точку M так, что $AM : MB = 1 : 2$. Найдите отрезок CM.

322. Найдите углы ромба, если угол между высотой и диагональю ромба, проведёнными из одной вершины, равен 28°.

323. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ равна 24 см, точка E – середина стороны BC. Найдите отрезки, на которые прямая AE делит диагональ BD.

Готовимся к изучению новой темы

324. Точка A (1; –6) – центр окружности, точка B (10; 6) принадлежит этой окружности. Чему равен радиус окружности?

325. Отрезок CD – диаметр окружности. Найдите координаты центра окружности и её радиус, если C (6; –4), D (–2; 10).

326. Какая фигура на координатной плоскости xy является графиком уравнения:

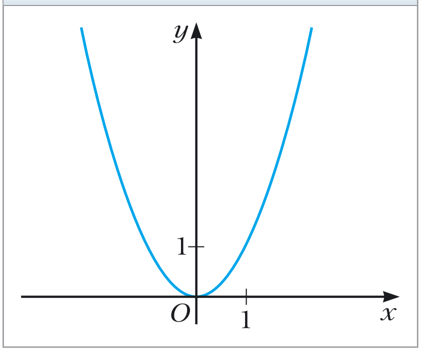
1) $y = 1$;
2) $y = 3x - 4$;
3) $x = -2$;
4) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$;
5) $xy = 1$;
6) $y = \sqrt{x}$?

§ 9. Уравнение фигуры. Уравнение окружности

Из курса алгебры 7 класса вы знаете, какую фигуру называют графиком уравнения. В этом параграфе вы познакомитесь с понятием уравнения фигуры.

Координаты $(x; y)$ каждой точки параболы, изображённой на рисунке 72, являются решением уравнения $y = x^2$. И наоборот, каждое решение уравнения с двумя переменными $y = x^2$ является ко-

Рис. 72



ординатами точки, лежащей на этой параболе. В этом случае говорят, что уравнение параболы, изображённой на рисунке 72, имеет вид $y = x^2$.

Определение

Уравнением фигуры F, заданной на плоскости xy, называют уравнение с двумя переменными x и y, имеющее такие свойства:
1) если точка принадлежит фигуре F, то её координаты являются решением данного уравнения;
2) любое решение $(x; y)$ данного уравнения является координатами точки, принадлежащей фигуре F.

Например, уравнение прямой, изображённой на рисунке 73, *а*, имеет вид $y = 2x - 1$, а уравнение гиперболы, изображённой на рисунке 71, *б*, — $y = \frac{1}{x}$. Принято говорить, что, например, уравнения $y = 2x - 1$ и $y = \frac{1}{x}$ **задают** прямую и гиперболу соответственно.

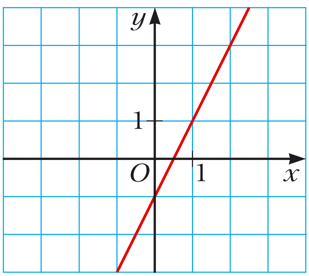
Если данное уравнение является уравнением фигуры F, то эту фигуру можно рассматривать как геометрическое место точек (ГМТ), координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

Пользуясь этими соображениями, выведем уравнение окружности радиуса R с центром в точке A $(a; b)$.

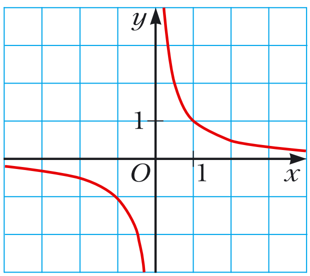
Пусть M $(x; y)$ — произвольная точка данной окружности (рис. 74). Тогда $AM = R$. Используя формулу расстояния между точками, получим: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$. Отсюда

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (*)$$

Рис. 73

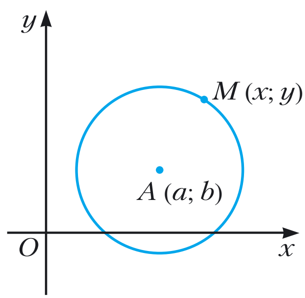


а



б

Рис. 74



Мы показали, что координаты $(x; y)$ произвольной точки M данной окружности являются решением уравнения $(*)$. Теперь покажем, что любое решение уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, где $R > 0$, является координатами точки, принадлежащей данной окружности.

Пусть $(x_1; y_1)$ — произвольное решение уравнения (*). Тогда $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2$. Отсюда $\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} = R$.

Это равенство показывает, что точка N $(x_1; y_1)$ удалена от центра окружности A $(a; b)$ на расстояние, равное радиусу окружности, а следовательно, точка N $(x_1; y_1)$ принадлежит данной окружности.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 9.1

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке A $(a; b)$ имеет вид

$$\boldsymbol{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

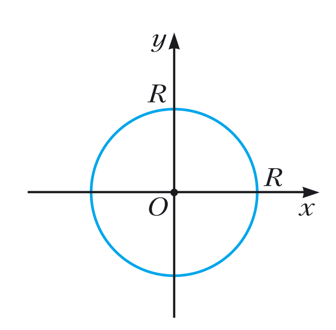
Заметим, что имеет место и такое утверждение:

любое уравнение вида $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, где a, b и R — некоторые числа, причём $R > 0$, является уравнением окружности радиуса R с центром в точке с координатами $(a; b)$.

Заметим, что если центром окружности является начало координат (рис. 75), то $a = b = 0$. В этом случае уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Рис. 75



Задача 1. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, если A $(-5; 9)$, B $(7; -3)$.

Решение. Так как центр окружности является серединой диаметра, то можем найти координаты $(a; b)$ центра C окружности:

$$a = \frac{-5 + 7}{2} = 1, \quad b = \frac{9 - 3}{2} = 3.$$

Следовательно, C $(1; 3)$.

Радиус окружности R равен отрезку AC. Тогда $R^2 = (1 + 5)^2 + (3 - 9)^2$, $R^2 = 72$.

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 72$.

Ответ: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 72$. ◄

Задача 2. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 50 = 0$ задаёт окружность. Найдите координаты центра и радиус этой окружности.

Решение. Представим данное уравнение в виде $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$:
$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + 50 - 58 = 0$.

Отсюда $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 8$.

Следовательно, данное уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(-3; 7)$ и радиусом $2\sqrt{2}$.

Ответ: $(-3; 7)$, $2\sqrt{2}$. ◄

Задача 3. Докажите, что треугольник с вершинами в точках $A\ (-2; -3)$, $B\ (1; 3)$ и $C\ (5; 1)$ является прямоугольным, и составьте уравнение окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Используя формулу расстояния между двумя точками, найдём квадраты сторон данного треугольника:

$AB^2 = (1 + 2)^2 + (3 + 3)^2 = 45$;
$AC^2 = (5 + 2)^2 + (1 + 3)^2 = 65$;
$BC^2 = (5 - 1)^2 + (1 - 3)^2 = 20$.

Так как $AB^2 + BC^2 = AC^2$, то данный треугольник является прямоугольным с прямым углом при вершине B. Центром окружности, описанной около треугольника ABC, является середина гипотенузы AC — точка $(1,5; -1)$, радиус окружности $R = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$(x - 1,5)^2 + (y + 1)^2 = \frac{65}{4}$.

Ответ: $(x - 1,5)^2 + (y + 1)^2 = \frac{65}{4}$. ◄

1. Что называют уравнением фигуры, заданной на плоскости xy?

2. Какой вид имеет уравнение окружности с центром в точке $(a; b)$ и радиусом R?

3. Какой вид имеет уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R?

Упражнения

327. Определите по уравнению окружности координаты её центра и радиус:

1) $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$;
2) $(x + 5)^2 + y^2 = 9$;
3) $x^2 + y^2 = 7$;
4) $x^2 + (y + 1)^2 = 3$.

328. Составьте уравнение окружности, если известны координаты её центра A и радиус R:

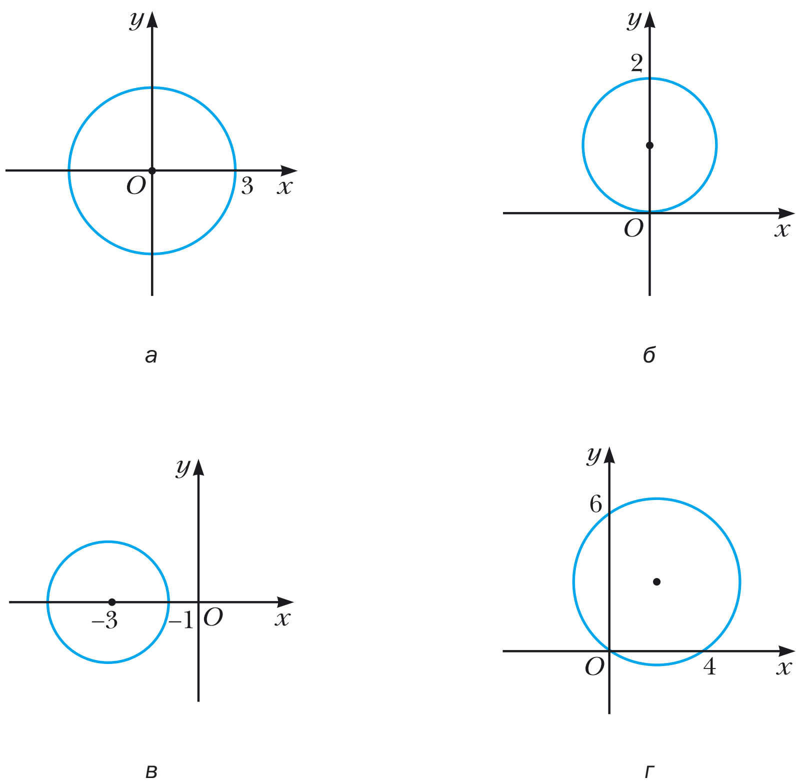
1) A (3; 4), $R = 4$;
2) A (–2; 0), $R = 1$;
3) A (7; –6), $R = \sqrt{2}$;
4) A (0; 5), $R = \sqrt{7}$.

329. Составьте уравнение окружности, если известны координаты её центра B и радиус R:

1) B (–1; 9), $R = 9$;
2) B (–8; –8), $R = \sqrt{3}$.

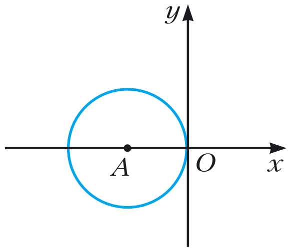
330. Определите координаты центра и радиус окружности, изображённой на рисунке 76, и запишите уравнение этой окружности.

Рис. 76

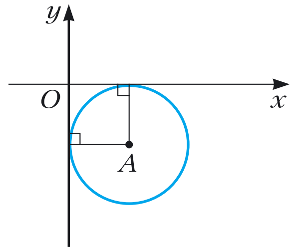


331. Радиус окружности с центром в точке A равен 4 (рис. 77). Составьте уравнение этой окружности.

Рис. 77



а



б

332. Постройте на координатной плоскости окружность, уравнение которой имеет вид:
1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

333. Постройте на координатной плоскости окружность, уравнение которой имеет вид: $(x - 4)^2 + y^2 = 9$.

334. Окружность задана уравнением $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 10$. Выясните, какие из точек A $(-3; 0)$, B $(-5; -2)$, C $(1; 0)$, D $(-4; 3)$, E $(-7; -3)$, F $(-9; 0)$ лежат: 1) на окружности; 2) внутри окружности; 3) вне окружности.

335. Принадлежит ли окружности $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$ точка:
1) A $(8; -8)$; 2) B $(6; -9)$; 3) C $(-3; 7)$; 4) D $(-4; 6)$?

336. Составьте уравнение окружности с центром в точке M $(-3; 1)$, проходящей через точку K $(-1; 5)$.

337. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, если A $(2; -7)$, B $(-2; 3)$.

338. Докажите, что отрезок AB является диаметром окружности $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 17$, если A $(1; -5)$, B $(9; -3)$.

339. Докажите, что отрезок CD является хордой окружности $x^2 + (y - 9)^2 = 169$, если C $(5; -3)$, D $(-12; 4)$.

340. Составьте уравнение окружности, центром которой является точка P $(-6; 7)$ и которая касается оси ординат.

341. Составьте уравнение окружности, центр которой находится на прямой $y = -5$ и которая касается оси абсцисс в точке S $(2; 0)$.

342. Сколько существует окружностей, проходящих через точку $(3; 5)$, радиусы которых равны $3\sqrt{5}$ и центры которых принадлежат оси ординат? Запишите уравнение каждой такой окружности.

343. Составьте уравнение окружности, центр которой принадлежит оси абсцисс и которая проходит через точки $A\ (-4;\ 1)$ и $B\ (8;\ 5)$.

344. Докажите, что окружность $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 36$:

1) касается оси ординат;
2) пересекает ось абсцисс;
3) не имеет общих точек с прямой $y = 10$.

345. Установите, является ли данное уравнение уравнением окружности:

1) $x^2 + 2x + y^2 - 10y - 23 = 0$;
2) $x^2 - 12x + y^2 + 4y + 40 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + 6y + 8x + 34 = 0$;
4) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 51 = 0$.

В случае утвердительного ответа укажите координаты центра и радиус этой окружности.

346. Докажите, что данное уравнение является уравнением окружности, и укажите координаты центра и радиус этой окружности:

1) $x^2 + y^2 + 16y + 60 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$.

347. Докажите, что треугольник с вершинами в точках $A\ (-1;\ -2)$, $B\ (-1;\ 2)$, $C\ (5;\ 2)$ является прямоугольным, и составьте уравнение окружности, описанной около этого треугольника.

348. Составьте уравнение окружности, радиус которой равен 5, проходящей через точки $C\ (-1;\ 5)$ и $D\ (6;\ 4)$.

349. Составьте уравнение окружности, радиус которой равен $\sqrt{10}$, проходящей через точки $M\ (-2;\ 1)$ и $K\ (-4;\ -1)$.

350. Составьте уравнение окружности, касающейся координатных осей и прямой $y = -4$.

351. Составьте уравнение окружности, касающейся координатных осей и прямой $x = 2$.

352. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки:

1) $A\ (-3;\ 7)$, $B\ (-8;\ 2)$, $C\ (-6;\ -2)$;
2) $M\ (-1;\ 10)$, $N\ (12;\ -3)$, $K\ (4;\ 9)$.

Упражнения для повторения

353. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке E, $AB = BE = 12$ см, $ED = 18$ см. Найдите площадь параллелограмма.

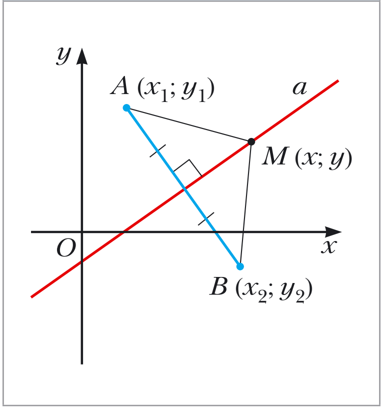
354. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит эту диагональ на отрезки длиной 9 см и 16 см. Найдите периметр прямоугольника.

355. В равнобокую трапецию вписана окружность радиуса 12 см. Одна из боковых сторон точкой касания делится на два отрезка, один из которых равен 16 см. Найдите площадь трапеции.

§ 10. Уравнение прямой

В предыдущем параграфе, рассматривая окружность как ГМТ, равноудалённых от данной точки, мы вывели её уравнение. Для того чтобы вывести уравнение прямой, рассмотрим её как ГМТ, равноудалённых от двух данных точек.

Рис. 78



Пусть a — данная прямая. Выберем две точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ так, чтобы прямая a была серединным перпендикуляром отрезка AB (рис. 78).

Пусть $M\ (x;\ y)$ — произвольная точка прямой a. Тогда по свойству серединного перпендикуляра отрезка выполняется равенство $MA = MB$, т. е.

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}. \qquad (*)$$

Значит, координаты $(x;\ y)$ произвольной точки M прямой a являются решением уравнения (*).

Теперь покажем, что любое решение уравнения (*) является координатами точки, принадлежащей данной прямой a.

Пусть $(x_0;\ y_0)$ — произвольное решение уравнения (*). Тогда $\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} = \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}$. Это равенство означает, что точка $N\ (x_0;\ y_0)$ равноудалена от точек $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$, следовательно, точка N принадлежит серединному перпендикуляру отрезка AB, т. е. прямой a.

Итак, мы доказали, что уравнение (*) и есть уравнение данной прямой a.

Однако из курса алгебры 7 класса вы знаете, что уравнение прямой выглядит так: $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа, причём a и b не равны нулю одновременно. Покажем, что уравнение (*) можно преобразовать к такому виду.

Возведём обе части уравнения (*) в квадрат:

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2.$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2.$

Обозначив $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = c$, получим уравнение $ax + by = c$.

Поскольку точки $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$ различны, то хотя бы одна из разностей $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ не равна нулю. Следовательно, числа a и b не равны нулю одновременно.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 10.1

Уравнение прямой имеет вид

$$\boldsymbol{ax + by = c,}$$

где a, b и c — некоторые числа, причём a и b не равны нулю одновременно.

Заметим, что имеет место и такое утверждение:

любое уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа, причём a и b не равны нулю одновременно, является уравнением прямой.

Если $a = b = c = 0$, то графиком уравнения $ax + by = c$ является вся плоскость xy. Если $a = b = 0$ и $c \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

Из курса алгебры 7 класса вы знаете, что уравнение вида $ax + by = c$ называют линейным уравнением с двумя переменными. Уравнение прямой является частным видом линейного уравнения. Схема, изображённая на рисунке 79, иллюстрирует сказанное.

Рис. 79

Также на уроках алгебры в 7 классе мы приняли без доказательства тот факт, что графиком линейной функции $y = kx + p$ является прямая. Сейчас мы это можем доказать.

Преобразуем уравнение $y = kx + p$ так: $-kx + y = p$. Мы получили уравнение вида $ax + by = c$ для случая, когда $a = -k$, $b = 1$, $c = p$. Поскольку в этом уравнении $b \neq 0$, то мы получили уравнение прямой.

А любую ли прямую на плоскости можно задать уравнением вида $y = kx + p$? Ответ на этот вопрос отрицательный.

Дело в том, что прямая, перпендикулярная оси абсцисс, не может являться графиком функции, а следовательно, не может иметь уравнение вида $y = kx + p$.

Вместе с тем если в уравнении прямой $ax + by = c$ принять $b = 0$, то его можно представить в виде $x = \frac{c}{a}$. Мы получили частный вид уравнения прямой, все точки которой имеют одинаковые абсциссы. Следовательно, эта прямая перпендикулярна оси абсцисс. Её называют вертикальной.

Также отметим, что если $b \neq 0$, то уравнение прямой $ax + by = c$ можно записать так: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Обозначив $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$, получим уравнение $y = kx + p$.

Следовательно, ***если $b = 0$ и $a \neq 0$, то уравнение прямой $ax + by = c$ задаёт вертикальную прямую; если $b \neq 0$, то это уравнение задаёт невертикальную прямую***.

Уравнение невертикальной прямой удобно записывать в виде $y = kx + p$.

Данная таблица подытоживает материал, рассмотренный в этом параграфе.

Уравнение	Значения a, b, c	График
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a и c — любые	Невертикальная прямая
	$b = 0$, $a \neq 0$, c — любое	Вертикальная прямая
	$a = b = c = 0$	Вся координатная плоскость
	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

<u>Задача 1.</u> Составьте уравнение прямой, проходящей через точки: 1) A (–3; 5) и B (–3; –6); 2) C (6; 1) и D (–18; –7).

Решение.

1) Так как данные точки имеют равные абсциссы, то прямая AB является вертикальной и её уравнение имеет вид $x = -3$.

2) Так как данные точки имеют разные абсциссы, то прямая CD не является вертикальной и можно воспользоваться уравнением прямой в виде $y = kx + p$.

Подставив координаты точек C и D в уравнение $y = kx + p$, получаем систему уравнений:

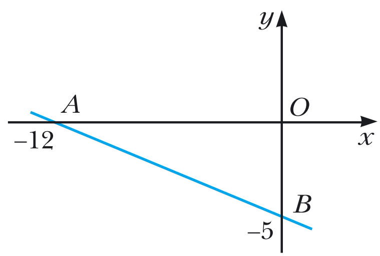
$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, находим, что $k = \frac{1}{3}$, $p = -1$. Искомое уравнение имеет вид $y = \frac{1}{3}x - 1$.

Ответ: 1) $x = -3$; 2) $y = \frac{1}{3}x - 1$. ◄

Задача 2. Найдите периметр и площадь треугольника, ограниченного прямой $5x + 12y = -60$ и осями координат.

Рис. 80



Решение. Найдём точки пересечения данной прямой с осями координат.

С осью абсцисс: при $y = 0$ получаем $5x = -60$, $x = -12$.

С осью ординат: при $x = 0$ получаем $12y = -60$, $y = -5$.

Следовательно, данная прямая и оси координат ограничивают прямоугольный треугольник AOB такой, что A $(-12; 0)$, B $(0; -5)$, O $(0; 0)$ (рис. 80). Найдём стороны треугольника: $OA = 12$, $OB = 5$, $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 13$.

Найдём периметр треугольника: $P = OA + OB + AB$, $P = 30$.

Найдём площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB$, $S = 30$.

Ответ: $P = 30$, $S = 30$. ◄

1. Какой вид имеет уравнение прямой на плоскости xy?

2. Как называют прямую, все точки которой имеют одинаковые абсциссы? Как расположена эта прямая относительно оси абсцисс?

3. Любое ли линейное уравнение с двумя переменными является уравнением прямой?

4. В каком виде удобно записывать уравнение невертикальной прямой?

5. Любую ли прямую на плоскости можно задать уравнением вида $y = kx + p$?

6. При каком условии уравнение прямой $ax + by = c$ является уравнением вертикальной прямой? Невертикальной прямой?

Упражнения

356. Какие из данных уравнений являются уравнениями прямых:
1) $2x - 3y = 5$; 4) $2x = 5$; 7) $0x + 0y = 0$;
2) $2x - 3y = 0$; 5) $-3y = 5$; 8) $0x + 0y = 5$?
3) $2x^2 - 3y = 5$; 6) $2x + 0y = 0$;

357. Найдите координаты точек пересечения прямой $4x - 5y = 20$ с осями координат. Принадлежит ли этой прямой точка: 1) A (10; 4); 2) B (6; 1); 3) C (–1,5; 5,2); 4) D (–1; 5)?

358. Найдите координаты точек пересечения прямой $3x + 4y = 12$ с осями координат. Какая из точек M (–2; 4) и K (8; –3) принадлежит этой прямой?

359. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A (6; –3) и перпендикулярной оси x. Какие координаты имеет точка пересечения этой прямой с осью x?

360. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку B (5; –8) и перпендикулярной оси y. Какие координаты имеет точка пересечения этой прямой с осью y?

361. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку C (–4; 9) параллельно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат.

362. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки:
1) A (1; –3) и B (–2; –9); 3) E (–4; –1) и F (9; –1);
2) C (3; 5) и D (3; –10); 4) M (3; –3) и K (–6; 12).

363. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки:
1) A (2; –5) и B (–3; 10); 2) C (6; –1) и D (24; 2).

364. Найдите координаты точки пересечения прямых:
1) $y = 3x - 7$ и $y = 5x + 9$;
2) $2x - 7y = -16$ и $6x + 11y = 16$.

365. Найдите координаты точки пересечения прямых:
1) $y = -4x + 1$ и $y = 2x - 11$;
2) $3x + 2y = 10$ и $x - 8y = 12$.

366. Точки A (–6; –1), B (1; 2) и C (–5; –8) — вершины треугольника ABC. Составьте уравнение прямой, содержащей медиану AK треугольника ABC.

367. Точки A (–3; –4), B (–2; 2), C (1; 3) и D (3; –2) — вершины трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Составьте уравнение прямой, содержащей среднюю линию трапеции.

368. Абсциссы середин боковых сторон трапеции равны. Верно ли утверждение, что основания трапеции перпендикулярны оси абсцисс?

369. Найдите периметр треугольника, ограниченного осями координат и прямой $4x - 3y = 12$.

370. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и прямой $7y - 2x = 28$.

371. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $3x + 2y = 6$ и $y = -\frac{9}{4}x$ и осью ординат.

372. Докажите, что окружность $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9$ и прямая $x + y = 7$ пересекаются, и найдите координаты их точек пересечения.

373. Докажите, что прямая $x + y = 5$ является касательной к окружности $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$, и найдите координаты точки касания.

374. Докажите, что окружность $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ и прямая $3x + y = 3$ не имеют общих точек.

375. Найдите расстояние от начала координат до прямой $5x - 2y = 10$.

376. Найдите расстояние от начала координат до прямой $x + y = -8$.

377. Найдите длину хорды окружности $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, лежащей на прямой $y = 3x$.

378. Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки A (1; –7) и B (–3; 5).

379. Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки C (2; 3) и D (–5; –2).

380. Найдите координаты точки, равноудалённой от осей координат и от точки A (3; 6).

381. Найдите координаты точки, равноудалённой от осей координат и от точки B (–4; 2).

382. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки A (2; 0) и B (4; 0), центр которой принадлежит прямой $2x + 3y = 18$.

383. Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, радиус которых равен 5 и которые отсекают на оси абсцисс хорду длиной 6.

Упражнения для повторения

384. Диагонали параллелограмма равны $6\sqrt{2}$ см и 8 см, а угол между ними составляет 45°. Найдите стороны параллелограмма.

385. Одна из сторон треугольника на 15 см больше другой, а высота, проведённая к третьей стороне, делит её на отрезки длиной 32 см и 7 см. Найдите периметр треугольника.

386. Центр окружности, описанной около равнобокой трапеции, лежит на её большем основании. Найдите радиус окружности, если диагональ трапеции равна 20 см, а высота — 12 см.

§ 11. Угловой коэффициент прямой

Рассмотрим уравнение $y = kx$. Оно задаёт невертикальную прямую, проходящую через начало координат.

Покажем, что прямые $y = kx$ и $y = kx + b$, где $b \neq 0$, параллельны.

Точки O (0; 0) и C (1; k) принадлежат прямой $y = kx$, а точки A (0; b) и B (1; $k + b$) принадлежат прямой $y = kx + b$ (рис. 81). Легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что середины диагоналей AC и OB четырёхугольника $OABC$ совпадают. Следовательно, $OABC$ — параллелограмм. Отсюда $AB \parallel OC$.

Теперь мы можем сделать такой вывод:

если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны **(1)**.

Пусть прямая $y = kx$ пересекает единичную полуокружность в точке M (x_0; y_0) (рис. 82). Угол AOM называют **углом между данной прямой и положительным направлением оси абсцисс**.

Рис. 81

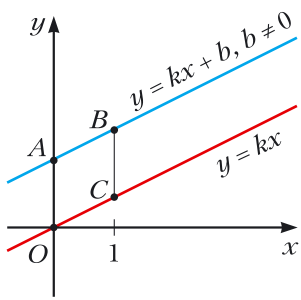
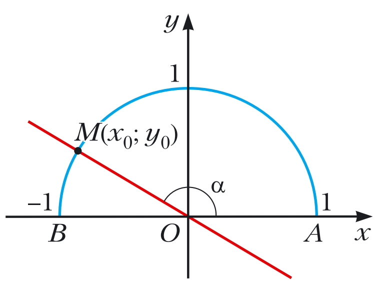


Рис. 82



Если прямая $y = kx$ совпадает с осью абсцисс, то угол между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс считают равным 0°.

Если прямая $y = kx$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, то считают, что и прямая $y = kx + b$, параллельная прямой $y = kx$, также образует угол α с положительным направлением оси абсцисс.

Рассмотрим прямую MO, уравнение которой имеет вид $y = kx$ (см. рис. 80). Если $\angle MOA = \alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_0}{x_0}$. Так как точка M $(x_0; y_0)$ принадлежит прямой $y = kx$, то $\frac{y_0}{x_0} = k$. Отсюда $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, для прямой $y = kx + b$ получаем, что

$$\boxed{k = \operatorname{tg}\alpha,}$$

где α – угол, который образует эта прямая с положительным направлением оси абсцисс. Поэтому коэффициент k называют **угловым коэффициентом** этой прямой.

Понятно, что если невертикальные прямые параллельны, то они образуют равные углы с положительным направлением оси абсцисс. Тогда тангенсы этих углов равны, следовательно, равны и их угловые коэффициенты.

Таким образом,

если прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, то $k_1 = k_2$ **(2)**.

Выводы **(1)** и **(2)** объединим в одну теорему.

Теорема 11.1

Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.

<u>**Задача.**</u> Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку A $(-4; 3)$ и параллельна прямой $y = 0{,}5x - 4$.

Решение. Пусть уравнение искомой прямой $y = kx + p$. Так как эта прямая и прямая $y = 0{,}5x - 4$ параллельны, то их угловые коэффициенты равны, т. е. $k = 0{,}5$.

Следовательно, искомое уравнение имеет вид $y = 0{,}5x + p$. Учитывая, что данная прямая проходит через точку A $(-4; 3)$, получаем: $0{,}5 \cdot (-4) + p = 3$. Отсюда $p = 5$.

Искомое уравнение имеет вид $y = 0{,}5x + 5$.

Ответ: $y = 0{,}5x + 5$. ◄

1. Поясните, что называют углом между прямой и положительным направлением оси абсцисс?
2. Чему считают равным угол между прямой, параллельной оси абсцисс или совпадающей с ней, и положительным направлением оси абсцисс?

3. Что называют угловым коэффициентом прямой?

4. Как связаны угловой коэффициент прямой и угол между прямой и положительным направлением оси абсцисс?

5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие параллельности двух невертикальных прямых на координатной плоскости.

Упражнения

387. Чему равен угловой коэффициент прямой:
1) $y = 2x - 7$;
2) $y = -3x$;
3) $y = x + 10$;
4) $y = 5 - x$;
5) $y = 4$;
6) $3x - 2y = 4$?

388. Какие из прямых $y = 6x - 5$, $y = 0{,}6x + 1$, $y = \frac{3}{5}x + 4$, $y = 2 - 6x$ и $y = 600 + 0{,}6x$ параллельны?

389. Какое число надо поставить вместо звёздочки, чтобы прямые были параллельными:
1) $y = 8x - 14$ и $y = *x + 2$;
2) $y = *x - 1$ и $y = 3 - 4x$?

390. Найдите уравнение прямой, проходящей через начало координат и параллельной прямой:
1) $y = 14x - 11$;
2) $y = -1{,}15x + 2$.

391. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A\ (-3; 7)$, угловой коэффициент которой равен: 1) 4; 2) -3; 3) 0.

392. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $B\ (2; -5)$, угловой коэффициент которой равен $-0{,}5$.

393. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M\ (-1; 9)$ и параллельной прямой: 1) $y = -7x + 3$; 2) $3x - 4y = -8$.

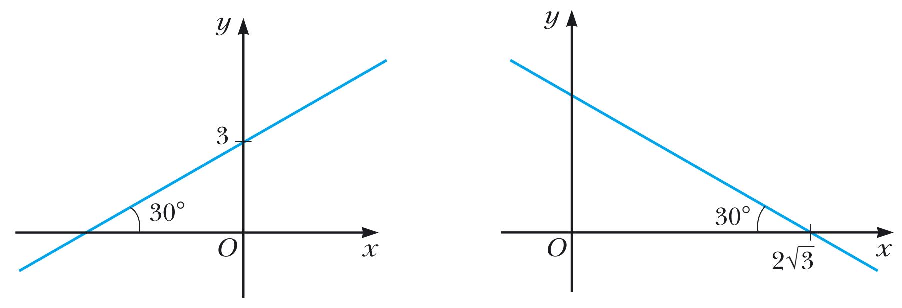
394. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $K\left(-\frac{1}{3}; 10\right)$ и параллельной прямой: 1) $y = 9x - 16$; 2) $6x + 2y = 7$.

395. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $A\ (2; 6)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) $60°$; 2) $120°$.

396. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $B\ (3; -2)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) $45°$; 2) $135°$.

397. Составьте уравнение прямой, изображённой на рисунке 83.

Рис. 83



а *б*

398. Определите, параллельны ли прямые:

1) $2x - 5y = 9$ и $5y - 2x = 1$;
2) $8x + 12y = 15$ и $4x + 6y = 9$;
3) $7x - 2y = 12$ и $7x - 3y = 12$;
4) $3x + 2y = 3$ и $6x + 4y = 6$.

399. Докажите, что прямые $7x - 6y = 3$ и $6y - 7x = 6$ параллельны.

400. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 4x + 2$ и пересекает прямую $y = -8x + 9$ в точке, принадлежащей оси ординат.

401. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 3x + 4$ и пересекает прямую $y = -4x + 16$ в точке, принадлежащей оси абсцисс.

402. 1) Составьте уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y = -x + 3$ и проходит через точку A (1; 5).

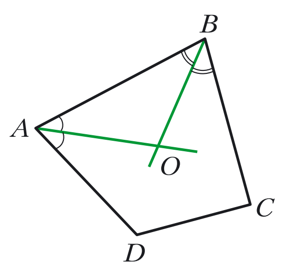
2) Докажите, что прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

Упражнения для повторения

403. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O (рис. 84). Докажите, что угол AOB равен полусумме углов C и D.

404. Высота ромба, проведённая из вершины его тупого угла, делит сторону ромба на отрезки 7 см и 18 см, считая от вершины острого угла. Найдите диагонали ромба.

Рис. 84



405. Медианы равнобедренного треугольника равны 15 см, 15 см и 18 см. Найдите площадь треугольника.

Когда сделаны уроки

Метод координат

Мы часто говорим: прямая $y = 2x - 1$, парабола $y = x^2$, окружность $x^2 + y^2 = 1$, тем самым отождествляя фигуру с её уравнением. Такой подход позволяет сводить задачу о поиске свойств фигуры к задаче об исследовании её уравнения. В этом и состоит суть метода координат.

Проиллюстрируем сказанное на таком примере.

Из наглядных соображений очевидно, что прямая и окружность имеют не более двух общих точек. Однако это утверждение не является аксиомой и его надо доказывать.

Эта задача сводится к исследованию количества решений системы уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ (x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2, \end{cases}$$

где числа a и b одновременно не равны нулю и $R > 0$.

Решая эту систему методом подстановки, мы получим квадратное уравнение, которое может иметь два решения, одно решение или вообще не иметь решений. Следовательно, для данной системы существует три возможных случая:

1) система имеет два решения — прямая и окружность пересекаются в двух точках;

2) система имеет одно решение — прямая касается окружности;

3) система не имеет решений — прямая и окружность не имеют общих точек.

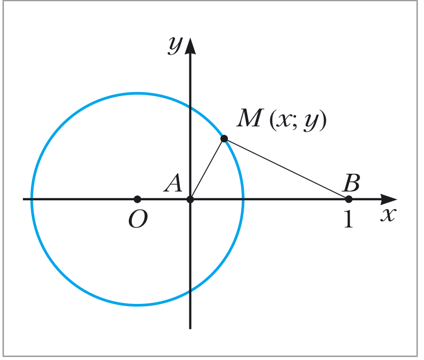
С каждым из этих случаев вы встречались, решая задачи № 372–374.

Метод координат особенно эффективен в тех случаях, когда требуется найти фигуру, все точки которой обладают некоторым свойством, т. е. найти геометрическое место точек.

Отметим на плоскости две точки A и B. Вы хорошо знаете, какой фигурой является геометрическое место точек M таких, что $\frac{MA}{MB} = 1$. Это серединный перпендикуляр отрезка AB. Интересно выяснить, какую фигуру образуют все точки M, для которых $\frac{MA}{MB} = k$, где $k \neq 1$. Решим эту задачу для $k = \frac{1}{2}$.

Плоскость, на которой отмечены точки A и B, «превратим» в координатную. Сделаем это так: в качестве начала координат выберем точку A, в качестве единичного отрезка — отрезок AB, ось абсцисс проведём так, чтобы точка B имела координаты (1; 0) (рис. 85).

Рис. 85



Пусть M $(x; y)$ — произвольная точка искомой фигуры F. Тогда $2MA = MB$, $4MA^2 = MB^2$. Отсюда:

$$4(x^2 + y^2) = (x - 1)^2 + y^2;$$

$$3x^2 + 2x + 3y^2 = 1;$$

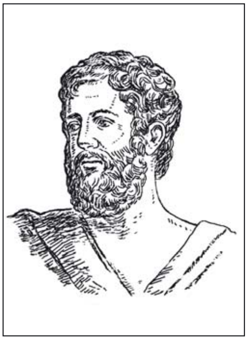
$$x^2 + \frac{2}{3}x + y^2 = \frac{1}{3};$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 = \frac{4}{9};$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}. \qquad (*)$$

Следовательно, если точка M $(x; y)$ принадлежит фигуре F, то её координаты являются решением уравнения $(*)$.

Пусть $(x_1; y_1)$ — некоторое решение уравнения $(*)$. Тогда легко показать, что $4(x_1^2 + y_1^2) = (x_1 - 1)^2 + y_1^2$. А это означает, что точка N $(x_1; y_1)$ такова, что $4NA^2 = NB^2$. Тогда $2NA = NB$. Следовательно, точка N принадлежит фигуре F.



Аполлоний Пергский
(III в. до н. э.)

Древнегреческий математик и астроном. Главным трудом Аполлония является монография «Конические сечения», в которой была представлена общая теория, описывающая свойства эллипса, параболы и гиперболы. Именно Аполлоний предложил общепринятые названия этих кривых.

Таким образом, уравнением фигуры F является уравнение (*), т. е. фигура F — это окружность с центром в точке $O\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ и радиусом $\frac{2}{3}$.

Мы решили задачу для частного случая, когда $k = \frac{1}{2}$. Можно показать, что искомой фигурой для любого положительного $k \neq 1$ будет окружность.

Эту окружность называют **окружностью Аполлония**.

Как строили мост между геометрией и алгеброй

Идея координат зародилась очень давно. Ведь ещё в старину люди изучали Землю, наблюдали звёзды, а по результатам своих исследований составляли карты, схемы.

Во II в. до н. э. древнегреческий учёный Гиппарх впервые использовал идею координат для определения места расположения объектов на поверхности Земли.

Только в XIV в. французский учёный Никола Орем (ок. 1323–1382) впервые применил в математике идею Гиппарха: он разбил плоскость на клетки (как разбита страница вашей тетради) и стал задавать положение точек широтой и долготой.

Однако огромные возможности применения этой идеи были раскрыты лишь в XVII в. в работах выдающихся математиков Пьера Ферма и Рене Декарта. В своих трудах эти учёные показали, как благодаря системе координат можно переходить от точек к числам, от линий к уравнениям, от геометрии к алгебре.

Рене Декарт (1596–1650)

Французский математик, философ, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики.

Несмотря на то что П. Ферма опубликовал свою работу на год раньше Р. Декарта, систему координат, которой мы сегодня пользуемся, называют **декартовой**. Это связано с тем, что Р. Декарт в своей работе «Рассуждение о методе» изобрёл новую удобную буквенную символику, которой с незначительными изменениями мы пользуемся и сегодня. Вслед за Декартом мы обозначаем переменные последними буквами латинского алфавита x, y, z, а коэффициенты – первыми: a, b, c, ... Привычные нам обозначения степеней x^2, y^3, z^5 и т. д. также ввёл Р. Декарт.

Задание № 3 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Какие координаты имеет середина отрезка AB, если A (–6; 7), B (4; –9)?

А) (–5; 8) Б) (–1; –1) В) (–5; –1) Г) (–1; 8)

2. Чему равно расстояние между точками C (8; –11) и D (2; –3)?

А) 100 Б) 10 В) $\sqrt{296}$ Г) $\sqrt{164}$

3. Какие координаты имеет центр окружности $(x - 5)^2 + (y + 9)^2 = 16$?

А) (5; –9) Б) (–5; 9) В) (5; 9) Г) (–5; –9)

4. Центром какой из данных окружностей является начало координат?

А) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ В) $x^2 + y^2 = 1$

Б) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ Г) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

5. Найдите радиус окружности, диаметром которой является отрезок MK, если M (14; 12) и K (–10; 2).

А) 26 Б) 13 В) 25 Г) 5

6. Каковы координаты точки пересечения прямой $5x - 3y = 15$ с осью абсцисс?

А) (0; –5) Б) (–5; 0) В) (0; 3) Г) (3; 0)

7. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, B (–2; 3), C (10; 9), D (7; 0). Чему равны координаты вершины A?

А) (1; 6) Б) (19; –3) В) (–5; –6) Г) (6; 5)

8. Чему равны координаты точки оси ординат, равноудалённой от точек A (–3; 4) и B (1; 8)?

А) (–5; 0) Б) (0; –5) В) (5; 0) Г) (0; 5)

9. Чему равна абсцисса точки прямой AB, ордината которой равна 2, если A (–7; 4), B (9; 12)?

А) 8,5 Б) –11 В) 4 Г) –2

10. Чему равно расстояние между точкой пересечения прямых $x - y = 4$ и $x + 3y = 12$ и точкой M (1; 7)?

А) 5 Б) 50 В) $5\sqrt{2}$ Г) $2\sqrt{5}$

11. Каково уравнение прямой, проходящей через точку P (–1; 6) параллельно прямой $y = 2x - 5$?

А) $y = 6 - 5x$ В) $y = 5x - 6$

Б) $y = 2x + 8$ Г) $y = 2x - 8$

12. Чему равен радиус окружности $x^2 + y^2 + 14y - 12x + 78 = 0$?

А) $\sqrt{7}$ Б) 7 В) 14 Г) $\sqrt{14}$

Итоги главы 3

Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ равно $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Координаты середины отрезка

Координаты середины $C\ (x_0;\ y_0)$ отрезка AB с концами $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ равны: $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Уравнение фигуры

Уравнением фигуры F, заданной на плоскости xy, называют уравнение с двумя переменными x и y, имеющее такие свойства:
1) если точка принадлежит фигуре F, то её координаты являются решением данного уравнения;
2) любое решение $(x;\ y)$ данного уравнения является координатами точки, принадлежащей фигуре F.

Уравнение окружности

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A\ (a;\ b)$ имеет вид: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
Любое уравнение вида $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, где a, b и R — некоторые числа, причём $R > 0$, является уравнением окружности радиуса R с центром в точке с координатами $(a;\ b)$.

Уравнение прямой

Уравнение прямой имеет вид $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа, причём a и b не равны нулю одновременно.
Любое уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа, причём a и b не равны нулю одновременно, является уравнением прямой.

Необходимое и достаточное условие параллельности невертикальных прямых

Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.

Глава 4. Векторы

Изучая материал этой главы, вы узнаете, что векторы используют не только в физике, но и в геометрии.

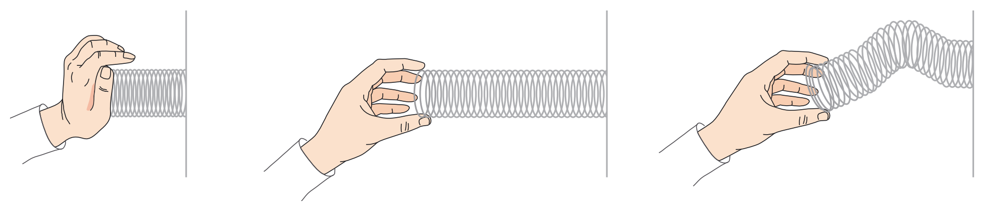
Вы научитесь складывать и вычитать векторы, умножать вектор на число, находить угол между двумя векторами, применять свойства векторов для решения задач.

§ 12. Понятие вектора

Вы знаете много величин, которые определяются своими числовыми значениями: масса, площадь, длина, объём, время, температура и т. д. Такие величины называют **скалярными величинами** или **скалярами**.

Из курса физики вам знакомы величины, для задания которых недостаточно знать только их числовое значение. Например, если на пружину действует человек с некоторой силой, то из этой информации не ясно, будет ли пружина сжиматься или растягиваться (рис. 86). Надо ещё знать, в каком направлении действует сила.

Рис. 86



Величины, которые определяются не только числовым значением, но и направлением, называют **векторными величинами** или **векторами**.

Сила, перемещение, скорость, ускорение, вес — примеры векторных физических величин. Есть векторы и в геометрии.

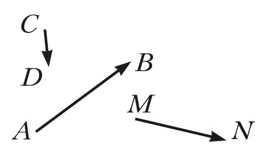
Рассмотрим отрезок AB. Если мы договоримся точку A считать **началом** отрезка, а точку B — его **концом**, то такой отрезок будет характеризоваться не только длиной, но и направлением от точки A к точке B.

Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка — его концом, то такой отрезок называют **направленным отрезком** или **вектором**.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают так: $\overrightarrow{AB}$ (читают: «вектор AB»).

На рисунках вектор изображают отрезком со стрелкой, указывающей его конец. На рисунке 87 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$.

Рис. 87



Для обозначения векторов также используют строчные буквы латинского алфавита со стрелкой сверху. На рисунке 88 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Вектор, у которого начало и конец — одна и та же точка, называют **нулевым вектором** или **нуль-вектором** и обозначают $\vec{0}$. Если начало и конец нулевого вектора — это точка A, то его можно обозначить и так: $\overrightarrow{AA}$. На рисунке нулевой вектор изображают точкой.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называют длину отрезка AB. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначают так: $|\overrightarrow{AB}|$, а модуль вектора $\vec{a}$ — так: $|\vec{a}|$.

Модуль нулевого вектора считают равным нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Определение

Ненулевые векторы называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.

Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

На рисунке 89 изображены коллинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{MN}$.

Тот факт, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, обозначают так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

На рисунке 90 ненулевые коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены. Такие векторы называют **сонаправленными** и обозначают $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ***и*** $\vec{b} \parallel \vec{c}$, ***то*** $\vec{a} \parallel \vec{c}$.

Аналогичным свойством обладают и сонаправленные векторы, т. е. ***если*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ***и*** $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, ***то*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (рис. 91).

Рис. 88

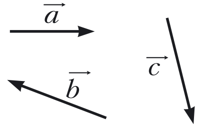


Рис. 89

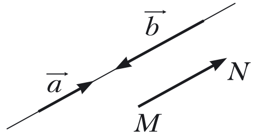


Рис. 90

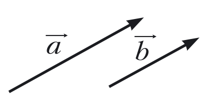
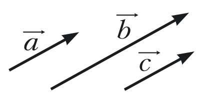


Рис. 91



На рисунке 92 ненулевые коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **противоположно направлены**. Этот факт обозначают так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определение

Ненулевые векторы называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.

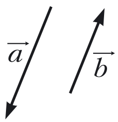
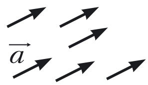
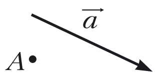
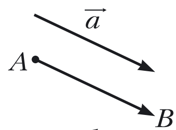
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то это записывают так: $\vec{a} = \vec{b}$.

Часто, говоря о векторах, мы не конкретизируем, какая точка является его началом. Так, на рисунке 93 изображён вектор $\vec{a}$ и векторы, равные вектору $\vec{a}$. Каждый из них тоже принято называть вектором $\vec{a}$.

Равенство ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ означает, что $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Нетрудно доказать, что если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$. Убедитесь в этом самостоятельно.

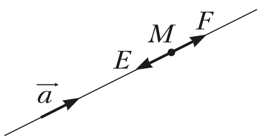
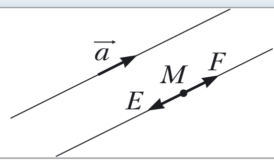
На рисунке 94, *а* изображён вектор $\vec{a}$ и точка A. Если построен вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен от точки** A (рис. 94, *б*).

Рис. 92	Рис. 93	Рис. 94
		 а  б

Покажем, как от произвольной точки M отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$.

Если вектор $\vec{a}$ нулевой, то искомым вектором будет вектор $\overrightarrow{MM}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$. Пусть точка M лежит на прямой, содержащей вектор $\vec{a}$ (рис. 95). На этой прямой существуют две точки E и F такие, что $ME = MF = |\vec{a}|$. На этом рисунке вектор $\overrightarrow{MF}$ будет равен вектору $\vec{a}$. Его и следует выбрать.

Рис. 95	Рис. 96
	

Если точка M не принадлежит прямой, содержащей вектор $\vec{a}$, то через точку M проведём прямую, ей параллельную (рис. 96). Дальнейшее построение аналогично уже рассмотренному.

От данной точки можно отложить только один вектор, равный данному.

Задача. Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

Решение. Из условия $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ следует, что $AB \parallel DC$ и $AB = DC$. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Равенство $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ означает, что диагонали четырёхугольника $ABCD$ равны. А параллелограмм с равными диагоналями — прямоугольник. ◄

1. Приведите примеры скалярных величин.
2. Какие величины называют векторными?
3. Что в геометрии называют векторами?
4. Какие из величин являются векторными: время, вес, ускорение, импульс, масса, перемещение, путь, площадь, давление?
5. Какой отрезок называют направленным отрезком или вектором?
6. Как обозначают вектор с началом в точке A и концом в точке B?
7. Какой вектор называют нулевым?
8. Что называют модулем вектора $\overrightarrow{AB}$?
9. Чему равен модуль нулевого вектора?
10. Какие векторы называют коллинеарными?
11. Как обозначают сонаправленные векторы? Противоположно направленные векторы?
12. Какие векторы называют равными?

Практические задания

406. Отметьте три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

407. Катер из точки A переместился на север на 40 км в точку B, а затем на запад на 60 км из точки B в точку C. Выбрав масштаб, начертите векторы, изображающие перемещения из точки A в точку B, из точки B в точку C, из точки A в точку C.

408. Начертите треугольник ABC. Начертите вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{CA}$, начало которого находится в точке B.

409. Даны вектор $\vec{a}$ и точка A (рис. 97). Отложите от точки A вектор, равный вектору $\vec{a}$.

410. Даны вектор $\vec{b}$ и точка B (рис. 98). Отложите от точки B вектор, равный вектору $\vec{b}$.

411. Отметьте точки A и B. Начертите вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$.

412. Начертите вектор $\vec{a}$ и отметьте точки M и N. Отложите от этих точек векторы, равные вектору $\vec{a}$.

Рис. 97

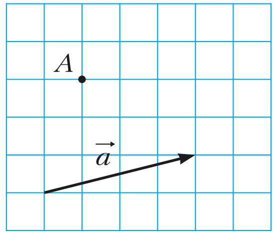
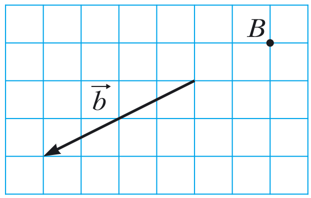


Рис. 98



413. Начертите треугольник ABC и отметьте точку M — середину стороны BC. От точки M отложите вектор, равный вектору $\overrightarrow{AM}$, а от точки B — вектор, равный вектору $\overrightarrow{AC}$. Докажите, что концы построенных векторов совпадают.

414. Начертите треугольник ABC. От точек B и C отложите векторы, соответственно равные векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$. Докажите, что концы построенных векторов совпадают.

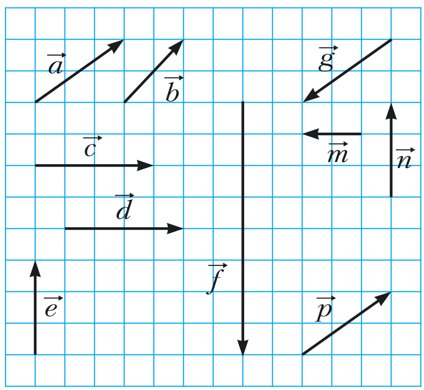
Упражнения

415. Укажите равные векторы, начала и концы которых находятся в вершинах квадрата $ABCD$.

416. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Укажите равные векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, D, O.

417. Какие из векторов, изображённых на рисунке 99:
1) равны;
2) сонаправлены;
3) противоположно направлены;
4) коллинеарны?

Рис. 99



418. Точки M и N – соответственно середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, D, M, N: 1) равные вектору $\overrightarrow{AM}$; 2) коллинеарные вектору $\overrightarrow{CD}$; 3) противоположно направленные с вектором $\overrightarrow{NC}$; 4) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{BC}$.

419. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, D, O: 1) равные; 2) сонаправленные; 3) противоположно направленные.

420. Точки M, N, P – соответственно середины сторон AB, BC, CA треугольника ABC. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, M, N, P: 1) равные вектору $\overrightarrow{MN}$; 2) коллинеарные вектору $\overrightarrow{AB}$; 3) противоположно направленные с вектором $\overrightarrow{MP}$; 4) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{CA}$.

421. Верно ли утверждение:

1) если $\vec{m} = \vec{n}$, то $|\vec{m}| = |\vec{n}|$;

2) если $\vec{m} = \vec{n}$, то $\vec{m} \parallel \vec{n}$;

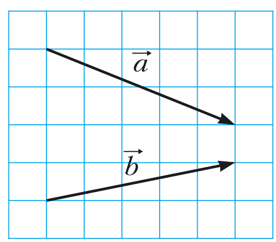
3) если $\vec{m} \neq \vec{n}$, то $|\vec{m}| \neq |\vec{n}|$?

422. Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

423. Определите вид четырёхугольника $ABCD$, если $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$.

424. Определите вид четырёхугольника $ABCD$, если векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны и $|\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AD}|$.

Рис. 100



425. Найдите модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 100), если сторона клетки равна 0,5 см.

426. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, O – точка пересечения диагоналей. Найдите модули векторов $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$.

427. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $|\overrightarrow{AB}| = 5$ см, $|\overrightarrow{AO}| = 6{,}5$ см. Найдите модули векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$.

428. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Верно ли, что точки A, B, C и D являются вершинами параллелограмма?

429. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Какие ещё равные векторы задают точки A, B, C и D?

430. Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

431. Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

432. Что можно сказать о векторе $\overrightarrow{AB}$, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$?

433. В прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AB и $\angle B = 30°$. Найдите модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MC}$, если $AC = 2$ см.

434. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медиана CM равна 6 см. Найдите модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $\angle A = 30°$.

435. Известно, что векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны. Вектор $\vec{a}$ коллинеарен каждому из векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Докажите, что вектор $\vec{a}$ является нулевым.

436. Известно, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой. Верно ли обратное утверждение: если точки A, B и C лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны?

437. Для четырёх точек A, B, C и D известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Докажите, что середины отрезков AD и BC совпадают. Докажите обратное утверждение: если середины отрезков AD и BC совпадают, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

438. Известно, что $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$. Докажите, что точка O — середина отрезка MN. Докажите обратное утверждение: если точка O — середина отрезка MN, то $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$.

Упражнения для повторения

439. Один из углов параллелограмма равен полусумме трёх остальных его углов. Найдите углы параллелограмма.

440. Периметр одного из двух подобных треугольников на 8 см больше периметра другого треугольника. Найдите периметры данных треугольников, если коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$.

441. На сторонах BC и AD ромба $ABCD$ отметили соответственно точки M и K такие, что $BM : MC = KD : AK = 1 : 2$. Найдите отрезок MK, если $AB = a$, $\angle ABC = 60°$.

§ 13. Координаты вектора

Рассмотрим на координатной плоскости вектор $\vec{a}$. От начала координат отложим равный ему вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 101). **Координатами вектора** $\vec{a}$ называют координаты точки A. Запись $\vec{a}\,(x;\ y)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x;\ y)$.

Числа x и y называют соответственно **первой** и **второй координатами вектора** $\vec{a}$.

Из определения следует, что *равные векторы имеют равные соответствующие координаты*. Например, каждый из равных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 102) имеет координаты (2; 1).

Рис. 101

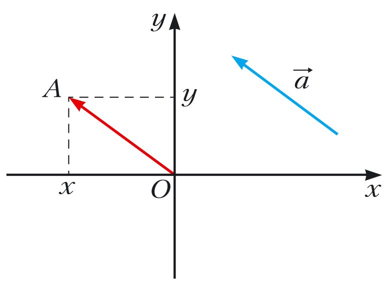
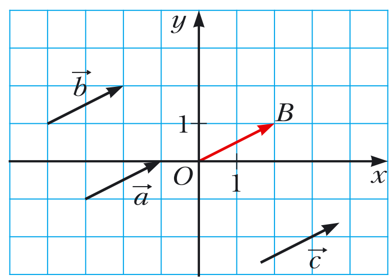


Рис. 102



Справедливо и обратное утверждение: *если соответствующие координаты векторов равны, то равны и сами векторы.*

Действительно, если отложить такие векторы от начала координат, то их концы совпадут.

Очевидно, что нулевой вектор имеет координаты (0; 0).

Теорема 13.1

Если точки $A\,(x_1;\ y_1)$ и $B\,(x_2;\ y_2)$ соответственно являются началом и концом вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ равны соответственно первой и второй координатам вектора $\vec{a}$.

Доказательство

Пусть вектор $\vec{a}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$, имеет координаты $(a_1;\ a_2)$. Докажем, что $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OM}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$. Тогда координаты точки M равны $(a_1; a_2)$.

Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, то, воспользовавшись результатом задачи 437, можем сделать вывод, что середины отрезков OB и AM совпадают. Координаты середин отрезков OB и AM соответственно равны $\left(\frac{0 + x_2}{2}; \frac{0 + y_2}{2}\right)$ и $\left(\frac{x_1 + a_1}{2}; \frac{y_1 + a_2}{2}\right)$. Тогда $\frac{0 + x_2}{2} = \frac{x_1 + a_1}{2}$, $\frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_1 + a_2}{2}$. (Эти равенства выполняются и тогда, когда точка O совпадает с точкой B или точка A совпадает с точкой M.)

Отсюда $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. ◄

Из формулы расстояния между двумя точками следует, что если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Задача. Даны координаты вершин параллелограмма $ABCD$: $A\ (3; -2)$, $B\ (-4; 1)$, $C\ (-2; -3)$. Найдите координаты вершины D.

Решение. Так как четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Следовательно, координаты этих векторов равны.

Пусть координаты точки D равны $(x; y)$. Для нахождения координат векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ воспользуемся теоремой 13.1. Имеем:

$\overrightarrow{AB}\,(-4 - 3; 1 - (-2)) = \overrightarrow{AB}\,(-7; 3)$; $\overrightarrow{DC}\,(-2 - x; -3 - y)$. Отсюда:

$$\begin{cases} -7 = -2 - x, \\ 3 = -3 - y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$$

Ответ: $D\ (5; -6)$. ◄

1. Объясните, что называют координатами данного вектора.
2. Что можно сказать о координатах равных векторов?
3. Что можно сказать о векторах, соответствующие координаты которых равны?
4. Как найти координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?
5. Как найти модуль вектора, если известны его координаты?

Практические задания

442. С помощью циркуля и линейки постройте точку, координаты которой равны координатам данного вектора $\vec{a}$ (рис. 103).

443. Отложите от начала координат векторы $\vec{a}\,(-3;\ 2)$, $\vec{b}\,(0;\ -2)$, $\vec{c}\,(4;\ 0)$.

444. Отложите от точки $M\,(-1;\ 2)$ векторы $\vec{a}\,(1;\ -3)$, $\vec{b}\,(-2;\ 0)$, $\vec{c}\,(0;\ -1)$.

Упражнения

445. Найдите координаты векторов, изображённых на рисунке 104.

Рис. 103

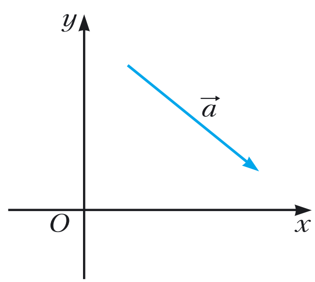
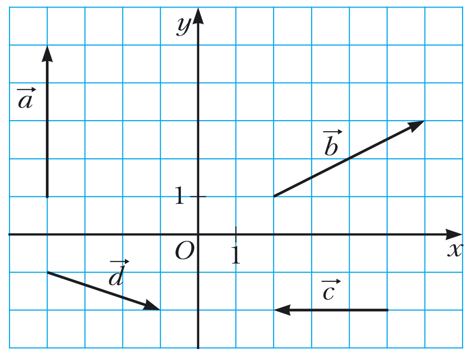


Рис. 104



446. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

1) $A\,(2;\ 3)$, $B\,(-1;\ 4)$;
2) $A\,(3;\ 0)$, $B\,(0;\ -3)$;
3) $A\,(0;\ 0)$, $B\,(-2;\ -8)$;
4) $A\,(m;\ n)$, $B\,(p;\ k)$.

447. Даны точка $A\,(1;\ 3)$ и вектор $\vec{a}\,(-2;\ 1)$. Найдите координаты точки B такой, что $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

448. Даны точки $A\,(3;\ -7)$, $B\,(4;\ -5)$, $C\,(5;\ 8)$. Найдите координаты точки D такой, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

449. От точки $A\,(4;\ -3)$ отложен вектор $\vec{m}\,(-1;\ 8)$. Найдите координаты конца вектора.

450. Даны точки $A\,(3;\ -4)$, $B\,(-2;\ 7)$, $C\,(-4;\ 16)$, $D\,(1;\ 5)$. Докажите, что $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

451. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\,(1;\ -5)$, $B\,(2;\ 3)$, $C\,(-3;\ 1)$, $D\,(-4;\ -7)$ является параллелограммом.

452. Среди векторов $\vec{a}\,(3; -4)$, $\vec{b}\,(-4; 2)$, $\vec{c}\,(3; \sqrt{11})$, $\vec{d}\,(-2; -4)$, $\vec{e}\,(-1; -2\sqrt{6})$, $\vec{f}\,(-4; 5)$ найдите те, которые имеют равные модули.

453. Даны точки $A\,(1; -4)$, $B\,(-2; 5)$, $C\,(1 + a; -4 + b)$, $D\,(-2 + a; 5 + b)$. Докажите, что $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

454. Найдите все значения x, при которых модуль вектора $\vec{a}\,(x; -8)$ равен 10.

455. При каких значениях y модуль вектора $\vec{b}\,(12; y)$ равен 13?

456. Отрезок BM – медиана треугольника с вершинами $A\,(3; -5)$, $B\,(2; -3)$, $C\,(-1; 7)$. Найдите координаты и модуль вектора $\overrightarrow{BM}$.

457. Точка F делит сторону BC прямоугольника $ABCD$ в отношении $1 : 2$, считая от вершины B (рис. 105). Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{FD}$.

458. Точка E – середина стороны AC прямоугольника $OACD$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{EO}$ (рис. 106).

Рис. 105

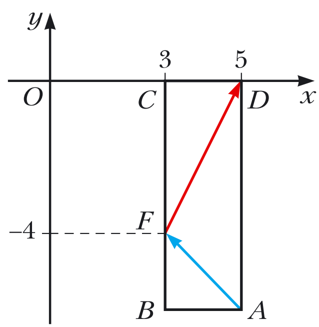
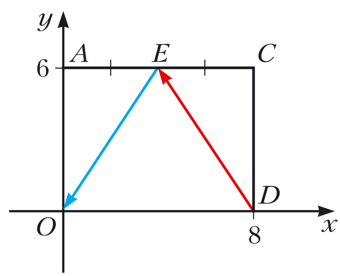


Рис. 106



459. Модуль вектора $\vec{a}$ равен 10. Его первая координата на 2 больше второй. Найдите координаты вектора $\vec{a}$.

460. Модуль вектора $\vec{c}$ равен 2, а его координаты равны. Найдите координаты вектора $\vec{c}$.

461. Точки $A\,(2; 5)$ и $B\,(7; 5)$ – вершины прямоугольника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ равен 13. Найдите координаты точек C и D.

462. Точки $A\,(1; 2)$ и $D\,(1; -6)$ – вершины прямоугольника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ равен 17. Найдите координаты вершин B и C.

Упражнения для повторения

463. Два равных равнобедренных треугольника ADB и CBD ($AB = BD = CD$) имеют общую боковую сторону (рис. 107). Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

464. Периметр треугольника равен 48 см, а его биссектриса делит противолежащую сторону на отрезки длиной 5 см и 15 см. Найдите стороны треугольника.

465. Боковая сторона равнобокой трапеции, описанной около окружности, равна a, а один из углов — $60°$. Найдите площадь трапеции.

§ 14. Сложение и вычитание векторов

Если тело переместилось из точки A в точку B, а затем из точки B в точку C, то результирующее перемещение из точки A в точку C естественно представить в виде вектора $\overrightarrow{AC}$, считая этот вектор суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, т. е. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 108).

Этот пример подсказывает, как ввести понятие «сумма векторов», т. е. как сложить два данных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, а от точки B — вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называют **суммой векторов** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ (рис. 109) *и записывают* $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Описанный алгоритм сложения двух векторов называют **правилом треугольника**.

Это название связано с тем, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то точки A, B и C являются вершинами треугольника (см. рис. 109).

Рис. 107

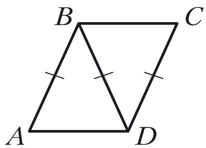


Рис. 108

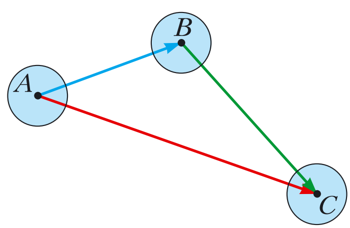
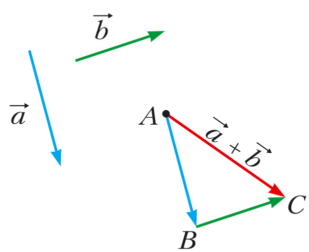


Рис. 109



По правилу треугольника можно складывать и коллинеарные векторы. На рисунках 110 *а* и *б* вектор $\overrightarrow{AC}$ равен сумме коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Рис. 110

а   б

Итак, ***для любых трёх точек A, B и C выполняется равенство*** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, которое выражает правило треугольника.

Теорема 14.1

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1; a_2)$ и $(b_1; b_2)$, то координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

Доказательство

Пусть точки $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2; y_2)$ и $C\ (x_3; y_3)$ таковы, что $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Имеем: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Докажем, что координаты вектора $\overrightarrow{AC}$ равны $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

Найдём координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\vec{a}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\vec{b}\,(x_3 - x_2; y_3 - y_2)$, $\overrightarrow{AC}\,(x_3 - x_1; y_3 - y_1)$.

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}\,(x_3 - x_1; y_3 - y_1) = \overrightarrow{AC}\,(x_3 - x_2 + x_2 - x_1; y_3 - y_2 + y_2 - y_1)$. С учётом того, что $x_2 - x_1 = a_1$, $x_3 - x_2 = b_1$, $y_2 - y_1 = a_2$, $y_3 - y_2 = b_2$, получаем: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}\,(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$. ◄

Замечание. Описывая правило треугольника для нахождения суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, мы отложили вектор $\vec{a}$ от произвольной точки. Если точку A заменить точкой A_1, то вместо вектора $\overrightarrow{AC}$, равного сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим некоторый вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. Из теоремы 14.1 следует, что координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ равны $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, следовательно, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Это означает, что сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависит от того, от какой точки откладывают вектор $\vec{a}$.

Свойства сложения векторов аналогичны свойствам сложения чисел.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняются равенства:

1) $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{0}} = \vec{\boldsymbol{a}}$;

2) $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{a}}$ – переместительное свойство;

3) $(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}) + \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} + (\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}})$ – сочетательное свойство.

Для доказательства этих свойств достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, записанных в правой и левой частях равенств. Сделайте это самостоятельно.

Сумму трёх и более векторов находят так: сначала складывают первый и второй векторы, затем складывают полученный вектор с третьим и т. д. Например, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Из переместительного и сочетательного свойств сложения векторов следует, что при сложении нескольких векторов можно менять местами слагаемые и расставлять скобки любым способом.

В физике часто приходится складывать векторы, отложенные от одной точки. Так, если к телу приложены силы $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ (рис. 111), то равнодействующая этих сил равна сумме: $\vec{F_1} + \vec{F_2}$.

Для нахождения суммы двух неколлинеарных векторов, отложенных от одной точки, удобно пользоваться **правилом параллелограмма для сложения векторов**.

Пусть надо найти сумму неколлинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ (рис. 112). Отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\overrightarrow{AD}$. Тогда $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Поскольку векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равны, то четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм с диагональю AC.

Рис. 111

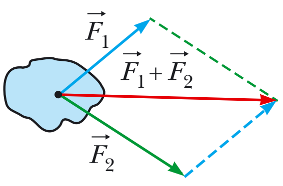
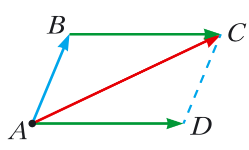


Рис. 112



Приведённые соображения позволяют сформулировать правило параллелограмма для сложения неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, *равный вектору* $\vec{a}$, *и вектор* $\overrightarrow{AD}$, *равный вектору* $\vec{b}$. *Построим параллелограмм* *ABCD* (рис. 113). *Тогда искомая сумма* $\vec{a}+\vec{b}$ *равна вектору* $\overrightarrow{AC}$.

Определение

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Пишут: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Покажем, как построить вектор, равный разности данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 114). Тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ будет разностью $\vec{a}-\vec{b}$. Действительно, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$. Следовательно, по определению разности двух векторов $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, т. е. $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$.

Рис. 113

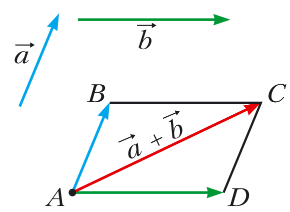
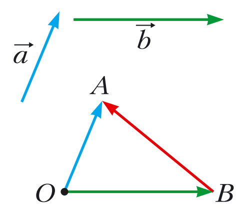


Рис. 114



На рисунке 114 векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ неколлинеарны. Однако описанный алгоритм применим и для нахождения разности коллинеарных векторов. На рисунках 115, *а* и *б* вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Рис. 115

а *б*

Итак, ***для любых трёх точек O, A и B выполняется равенство*** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, которое выражает **правило нахождения разности двух векторов**, отложенных от одной точки.

Теорема 14.2

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1;\ a_2)$ и $(b_1;\ b_2)$, то координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равны $(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2)$.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Из теоремы 14.2 следует, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует единственный вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

Определение

Два ненулевых вектора называют противоположными, если их модули равны и векторы противоположно направлены.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположны, то говорят, что вектор $\vec{a}$ – **противоположный** вектору $\vec{b}$, а вектор $\vec{b}$ – противоположный вектору $\vec{a}$.

Вектором, противоположным нулевому вектору, считают нулевой вектор.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают так: $-\vec{a}$.

Из определения следует, что вектору $\overrightarrow{AB}$ противоположным является вектор $\overrightarrow{BA}$. Тогда ***для любых точек A и B выполняется равенство*** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Из правила треугольника следует, что

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

А из этого равенства следует, что если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2)$, то вектор $-\vec{a}$ имеет координаты $(-a_1;\ -a_2)$.

Теорема 14.3

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Для доказательства достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, записанных в правой и левой частях равенства. Сделайте это самостоятельно.

Теорема 14.3 позволяет свести вычитание векторов к сложению: *чтобы из вектора* $\vec{a}$ *вычесть вектор* $\vec{b}$, *можно к вектору* $\vec{a}$ *прибавить вектор* $-\vec{b}$ (рис. 116).

Задача. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 117). Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$ через векторы $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

Рис. 116

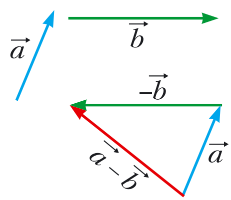
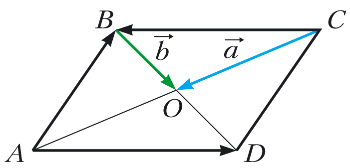


Рис. 117



Решение. Так как точка O — середина отрезков AC и BD, то $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

Имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BO} = -\vec{a} - \vec{b};$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a};$$

$$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}.$$ ◄

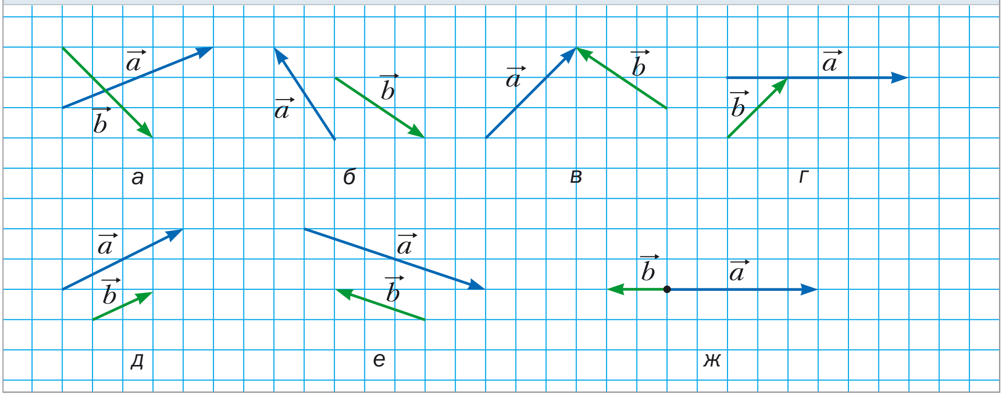
1. Опишите правило треугольника для нахождения суммы векторов.
2. Какое равенство выражает правило треугольника для нахождения суммы векторов?
3. Чему равны координаты вектора, равного сумме двух данных векторов?
4. Запишите равенства, выражающие свойства сложения векторов.
5. Опишите правило параллелограмма для нахождения суммы двух векторов.
6. Какой вектор называют разностью двух векторов?
7. Какое равенство выражает правило нахождения разности двух векторов, отложенных от одной точки?
8. Чему равны координаты вектора, равного разности двух данных векторов?

9. Какие векторы называют противоположными?
10. Как обозначают вектор, противоположный вектору $\vec{a}$?
11. Как можно свести вычитание векторов к сложению векторов?

Практические задания

466. С помощью правила треугольника постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунке 118.

Рис. 118



467. С помощью правила параллелограмма постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунке 118, *а* – *г*.

468. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунке 116, постройте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

469. Начертите треугольник ABC. Отложите от точки A вектор, противоположный вектору: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC}$.

470. Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте векторы $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

471. Начертите треугольник MNP. Постройте векторы $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$.

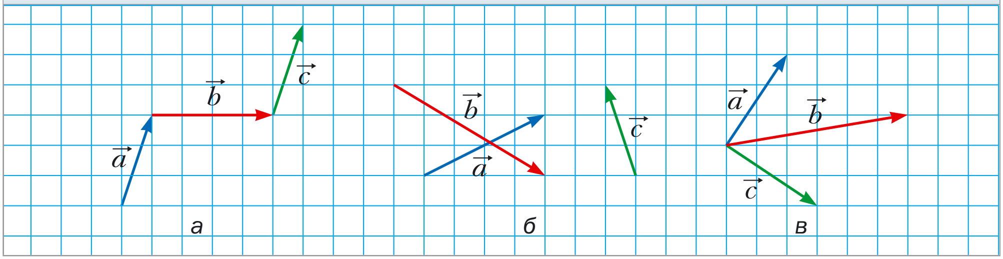
472. Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте векторы $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$.

473. Начертите треугольник ABC. Постройте векторы $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$.

474. Отметьте четыре точки M, N, P, Q. Постройте вектор $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}$.

475. Для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, изображённых на рисунке 119, постройте вектор: 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Рис. 119

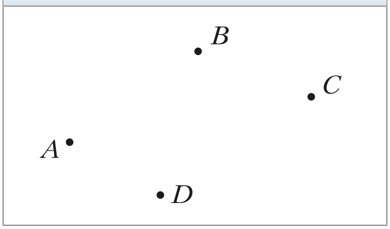


476. Отложите от одной точки три вектора, модули которых равны, так, чтобы сумма двух из них была равна третьему вектору.

477. Отложите от одной точки три вектора, модули которых равны, так, чтобы их сумма была равна нуль-вектору.

478. Для точек A, B, C, D, изображённых на рисунке 120, постройте такой вектор $\vec{x}$, чтобы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\vec{x}=\vec{0}$.

Рис. 120



479. Начертите треугольник ABC. Постройте такую точку X, чтобы:

1) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}$;

2) $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XA}$.

Упражнения

480. Дан треугольник ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{BC}$ через векторы:

1) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$;

2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

481. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$.

482. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DA}=\vec{b}$.

483. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$.

484. Докажите, что для любых точек A, B, C, D выполняется равенство:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$;
3) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

485. Докажите, что для любых точек A, B, C, D выполняется равенство:

1) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$.

486. Точки M и N — соответственно середины сторон BA и BC треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NB}$ через векторы $\overrightarrow{BM} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{BN} = \vec{n}$.

487. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

488. Даны четырёхугольник $ABCD$ и некоторая точка O. Известно, что $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

489. Даны векторы $\vec{a}\,(4; -5)$ и $\vec{b}\,(-1; 7)$. Найдите:

1) координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$;
2) $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

490. Даны точки $A\,(1; -3)$, $B\,(4; 5)$, $C\,(-2; -1)$, $D\,(3; 0)$. Найдите:

1) координаты векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$;
2) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|$, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}|$.

491. Сумма векторов $\vec{a}\,(5; -3)$ и $\vec{b}\,(x; 4)$ равна вектору $\vec{c}\,(2; y)$. Найдите x и y.

492. Сумма векторов $\vec{a}\,(x; -1)$ и $\vec{b}\,(2; y)$ равна вектору $\vec{c}\,(-3; 4)$. Найдите x и y.

493. Дан вектор $\overrightarrow{MN}\,(3; -5)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{NM}$.

494. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 3 см. Найдите $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$.

495. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) равен 4 см. Найдите $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}|$.

496. Даны точки $N\,(3; -5)$ и $F\,(4; 1)$. Найдите $|\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OF}|$ и $|\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{ON}|$, где O — произвольная точка.

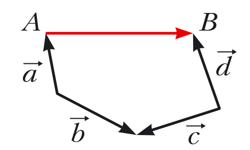
497. Пловец со скоростью $\sqrt{3}$ м/с переплывает речку в направлении, перпендикулярном параллельным берегам. Скорость течения равна 1 м/с. Под каким углом к направлению, перпендикулярному берегам, перемещается пловец?

498. Докажите, что для любых n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выполняется равенство $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

499. Докажите, что для любых точек A, B, C, D, E выполняется равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}$.

500. Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 121).

Рис. 121



501. В параллелограмме $ABCD$ точки M, N, K — середины сторон соответственно AB, BC и CD. Выразите векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{MN} = \vec{m}$, $\overrightarrow{KN} = \vec{n}$.

502. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{DO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$.

503. Дан четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{DA}$, где M — произвольная точка.

504. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$, где M — произвольная точка.

505. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что:

1) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$;

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

506. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Докажите, что:

1) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$;

2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

507. Докажите, что для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

508. Докажите, что для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a} - \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

509. Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Докажите, что $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

510. Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Докажите, что $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

511. Может ли быть нулевым вектором сумма трёх векторов, модули которых равны:

1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

512. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

513. Векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{EF}$ попарно неколлинеарны, причём $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам MN, PQ и EF.

514. Докажите, что для параллелограмма $ABCD$ и произвольной точки X выполняется равенство $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$.

515. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что: 1) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{AB}|$; 2) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{BX}|$.

516. Гребец из точки A переправляется через реку шириной 240 м с постоянной собственной скоростью, направляя нос лодки перпендикулярно противоположному берегу. Через 4 мин лодка причаливает к противоположному берегу в точке C, расположенной ниже по течению от точки A на 48 м. Определите скорость течения и скорость лодки относительно берегов реки.

517. Катер из точки A переправляется через реку шириной 300 м с постоянной собственной скоростью. Через 100 с катер причаливает к противоположному берегу в точке B. Прямая AB перпендикулярна параллельным берегам реки. Скорость течения реки $\sqrt{3}$ м/с. Под каким углом к берегу реки был направлен нос катера?

518. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

519. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены параллелограммы AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A. Прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 попарно непараллельны. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.

Упражнения для повторения

520. В треугольник ABC вписан параллелограмм $CDMK$ так, что угол C у них общий, а точки D, M и K принадлежат соответственно сторонам AC, AB и BC треугольника. Найдите стороны параллелограмма $CDMK$, если его периметр равен 20 см, $AC = 12$ см, $BC = 9$ см.

521. Докажите, что площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность, составляет $\frac{3}{4}$ площади правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

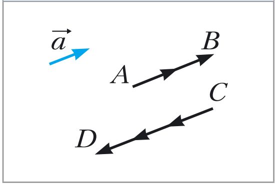
§ 15. Умножение вектора на число

Пусть дан ненулевой вектор $\vec{a}$. На рисунке 122 изображены вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}+\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{CD}$, равный вектору $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$. Очевидно, что

$$|\overrightarrow{AB}| = 2|\vec{a}| \text{ и } \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{a},$$

$$|\overrightarrow{CD}| = 3|\vec{a}| \text{ и } \overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \vec{a}.$$

Рис. 122



Вектор $\overrightarrow{AB}$ обозначают $2\vec{a}$ и считают, что он получен в результате **умножения вектора $\vec{a}$ на число** 2. Аналогично считают, что вектор $\overrightarrow{CD}$ получен в результате умножения вектора $\vec{a}$ на число -3, и обозначают $\overrightarrow{CD} = -3\vec{a}$.

Этот пример подсказывает, как ввести понятие «умножение вектора на число».

Определение

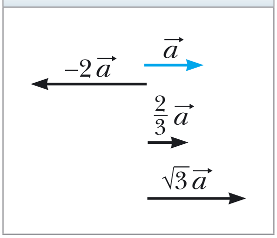
Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:
1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;
2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Пишут: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то считают, что $k\vec{a} = \vec{0}$.

На рисунке 123 изображены векторы $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\,\vec{a}$.

Рис. 123



Из определения следует, что

$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$,

$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

Также из определения следует, что ***если $\vec{b} = k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны***.

А если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то можно ли представить вектор $\vec{b}$ в виде произведения $k\vec{a}$? Ответ даёт следующая теорема.

Теорема 15.1

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Доказательство

Если $\vec{b} = \vec{0}$, то при $k = 0$ получаем, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если $\vec{b} \neq \vec{0}$, то или $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, или $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

1) Пусть $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Рассмотрим вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, где $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Поскольку $k > 0$, то $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, следовательно, $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Кроме того, $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Таким образом, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ сонаправлены и модули их равны. Отсюда $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2) Пусть $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Рассмотрим вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, где $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Для этого случая завершите доказательство самостоятельно. ◄

Теорема 15.2

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $(ka_1; ka_2)$.

Доказательство

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то утверждение теоремы очевидно.

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $k \neq 0$. Рассмотрим вектор $\vec{b}\,(ka_1; ka_2)$. Покажем, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Имеем: $|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k||\vec{a}|$.

Отложим от начала координат векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, равные соответственно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Так как прямая OA проходит через начало координат, то её уравнение имеет вид $ax + by = 0$.

Этой прямой принадлежит точка $A\,(a_1; a_2)$.

Тогда $a \cdot a_1 + b \cdot a_2 = 0$. Отсюда $a(ka_1) + b(ka_2) = 0$.

Следовательно, точка $B\,(ka_1; ka_2)$ также принадлежит прямой OA, поэтому векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ коллинеарны, т. е. $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

При $k > 0$ числа a_1 и ka_1 имеют одинаковые знаки (или оба равны нулю). Таким же свойством обладают числа a_2 и ka_2. Следовательно, при $k > 0$ точки A и B лежат в одной координатной четверти (или на одном координатном луче), поэтому векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ сонаправлены (рис. 124), т. е. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. При $k < 0$ векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ будут противоположно направленными, т. е. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Итак, мы получили, что $\vec{b} = k\vec{a}$. ◄

Следствие 1

Векторы $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(ka_1; ka_2)$ коллинеарны.

Следствие 2

Если векторы $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ коллинеарны, причём $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $b_1 = ka_1$ и $b_2 = ka_2$.

С помощью теоремы 15.2 можно доказать такие **свойства умножения вектора на число**.

Для любых чисел k и m и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы равенства:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ — сочетательное свойство;

2) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ — первое распределительное свойство;

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — второе распределительное свойство.

Для доказательства этих свойств достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, записанных в правых и левых частях равенств. Сделайте это самостоятельно.

Эти свойства позволяют преобразовывать выражения, содержащие суммы векторов, разности векторов и произведения векторов на число, аналогично тому, как мы преобразовываем алгебраические выражения.

Например, $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.

Задача 1. Докажите, что если $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, то точки O, A и B лежат на одной прямой.

Решение. Из условия следует, что векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ коллинеарны. Кроме того, эти векторы отложены от одной точки O. Следовательно, точки O, A и B лежат на одной прямой. ◄

Задача 2. Точка M — середина отрезка AB и X — произвольная точка (рис. 125). Докажите, что $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

Решение. Применяя правило треугольника, запишем:

$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AM}$;

$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BM}$.

Сложим эти два равенства:

$2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

Так как векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ противоположны, то $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$. Имеем: $2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$. Отсюда $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}\right)$. ◄

Задача 3. Докажите, что середины оснований трапеции и точка пересечения продолжений её боковых сторон лежат на одной прямой.

Решение. Пусть точки M и N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ соответственно, O — точка пересечения прямых AB и CD (рис. 126).

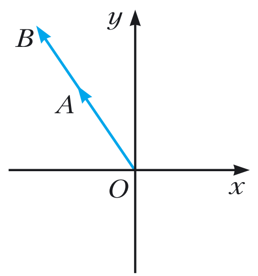


Рис. 124

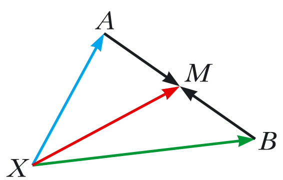


Рис. 125

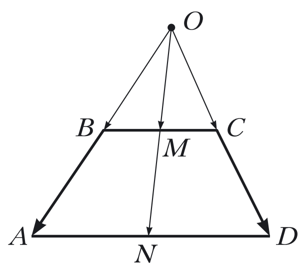


Рис. 126

Применяя ключевую задачу 2, запишем:

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right)$.

Так как $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OD}$, то $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC} = k_1\overrightarrow{OD}$, где k и k_1 — некоторые числа.

Так как $\Delta BOC \backsim \Delta AOD$, то $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$. Следовательно, $k = k_1$.

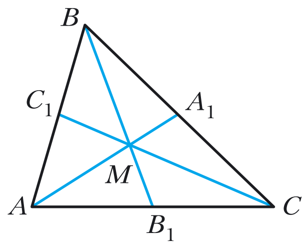
Имеем: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}\right) = k \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right) = k \cdot \overrightarrow{ON}$.

Из ключевой задачи 1 следует, что точки O, M и N лежат на одной прямой. ◄

Задача 4. Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Решение. Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC (рис. 127). Имеем:

Рис. 127



$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right);$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right);$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}\right).$$

Отсюда $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}\right) = \vec{0}.$$

Из свойства медиан треугольника следует, что $AM = \frac{2}{3}AA_1$. Тогда $\overrightarrow{MA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$. Аналогично $\overrightarrow{MB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{MC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Отсюда

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1} = -\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}\right) = \vec{0}.$$ ◄

Другой способ решения задачи 4 приведён в указании к задаче 518.

1. Что называют произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k, отличное от нуля?
2. Чему равно произведение $k\vec{a}$, если $k = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$?
3. Что можно сказать о ненулевых векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{b} = k\vec{a}$, где k — некоторое число?
4. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, причём $\vec{a} \neq \vec{0}$. Как можно выразить вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$?
5. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$. Чему равны координаты вектора $k\vec{a}$?
6. Что можно сказать о векторах, координаты которых равны $(a_1; a_2)$ и $(ka_1; ka_2)$?
7. Как связаны между собой соответствующие координаты коллинеарных векторов $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1; b_2)$?
8. Запишите сочетательное и распределительные свойства умножения вектора на число.

Практические задания

522. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 128). Постройте вектор:

1) $2\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{c}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{6}\vec{a}$.

523. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (см. рис. 128). Постройте вектор:

1) $\frac{1}{2}\vec{a}$; 2) $-2\vec{b}$; 3) $-\frac{2}{3}\vec{c}$.

524. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 129). Постройте вектор:

1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.

Рис. 128

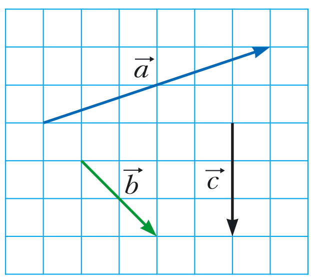
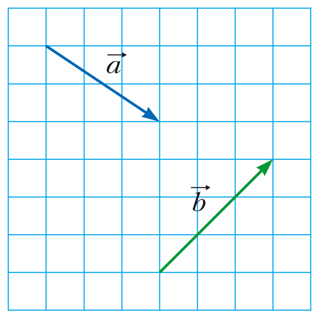


Рис. 129



525. Постройте два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Отметьте какую-либо точку O. От точки O отложите векторы:

1) $3\vec{x}+\vec{y}$; 2) $\vec{x}+2\vec{y}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{x}+3\vec{y}$; 4) $-2\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

526. Постройте три точки A, B и C такие, что:

1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

527. Начертите треугольник ABC. Отметьте точку M — середину стороны AC.

1) От точки M отложите вектор, равный вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

2) От точки B отложите вектор, равный вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

528. Начертите трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Отметьте точку M – середину стороны AB. От точки M отложите вектор, равный вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

529. Начертите треугольник ABC. Постройте вектор, равный вектору $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, так, чтобы его начало принадлежало стороне AB, а конец – стороне BC.

Упражнения

530. Найдите модули векторов $3\vec{m}$ и $-\frac{1}{2}\vec{m}$, если $|\vec{m}| = 4$.

531. Какой из векторов, $3\vec{a}$ или $-\frac{1}{3}\vec{a}$, сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$?

532. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются сонаправленными или противоположно направленными, если: 1) $\vec{b} = 2\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $\vec{b} = \sqrt{2}\vec{a}$? Найдите отношение $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

533. Выразите вектор $\vec{p}$ из равенства: 1) $\vec{q} = 3\vec{p}$; 2) $\overrightarrow{AC} = -2\vec{p}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{p} = \vec{q}$; 4) $2\vec{p} = 3\vec{q}$.

534. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите: 1) вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$; 2) вектор $\overrightarrow{BD}$ через вектор $\overrightarrow{BO}$; 3) вектор $\overrightarrow{CO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

535. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразите вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

536. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отметили точку M так, что $AM : MC = 1 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{MC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

537. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина стороны BC, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

538. В треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Выразите: 1) вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CA}$; 2) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{MN}$.

539. На отрезке AB длиной 18 см отметили точку C так, что $BC = 6$ см. Выразите: 1) вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$; 2) вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$; 3) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{BC}$.

540. Дан вектор $\vec{a}\,(-4;\ 2)$. Найдите координаты и модули векторов $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$, $\frac{3}{2}\vec{a}$.

541. Дан вектор $\vec{b}\,(-6;\ 12)$. Найдите координаты и модули векторов $2\vec{b}$, $-\frac{1}{6}\vec{b}$, $\frac{2}{3}\vec{b}$.

542. Дан вектор $\vec{a}\,(3;\ -2)$. Какие из векторов $\vec{b}\,(-3;\ -2)$, $\vec{c}\,(-6;\ 4)$, $\vec{d}\left(\frac{3}{2};\ -1\right)$, $\vec{e}\left(-1;\ -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{f}\left(-3\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right)$ коллинеарны вектору $\vec{a}$?

543. Даны векторы $\vec{a}\,(3;\ -3)$ и $\vec{b}\,(-16;\ 8)$. Найдите координаты вектора:

1) $2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b}$.

544. Даны векторы $\vec{m}\,(-2;\ 4)$ и $\vec{n}\,(3;\ -1)$. Найдите координаты вектора:

1) $3\vec{m} + 2\vec{n}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{m} + 2\vec{n}$; 3) $\vec{m} - 3\vec{n}$.

545. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки M и N так, что $AM : MB = AN : NC = 1 : 2$. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$.

546. Точки O, A и B лежат на одной прямой. Докажите, что существует такое число k, что $\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OB}$.

547. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$. Выразите вектор $\overrightarrow{NM}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

548. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки E и F так, что $BE : EC = 3 : 1$, $CF : FD = 1 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

549. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, если $A\,(1;\ 1)$, $B\,(3;\ -2)$, $C\,(-1;\ 3)$, $D\,(5;\ -6)$.

550. Среди векторов $\vec{a}\,(1;\ -2)$, $\vec{b}\,(-3;\ -6)$, $\vec{c}\,(-4;\ 8)$, $\vec{d}\,(-1;\ -2)$ укажите пары коллинеарных векторов.

551. Даны векторы $\vec{m}(4;\ -6)$, $\vec{n}\left(-1;\ \frac{3}{2}\right)$, $\vec{k}\left(3;\ -\frac{9}{2}\right)$. Укажите пары сонаправленных и противоположно направленных векторов.

552. Найдите значения x, при которых векторы $\vec{a}\ (1;\ x)$ и $\vec{b}\left(\frac{x}{4};\ 4\right)$ коллинеарны.

553. При каких значениях y векторы $\vec{a}\ (2;\ 3)$ и $\vec{b}\ (-1;\ y)$ коллинеарны?

554. Дан вектор $\vec{b}\ (-3;\ 1)$. Найдите координаты вектора, коллинеарного вектору $\vec{b}$, модуль которого в два раза больше модуля вектора $\vec{b}$. Сколько решений имеет задача?

555. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, противоположно направленного вектору $\vec{n}\ (5;\ -12)$, если $|\vec{m}| = 39$.

556. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, сонаправленного с вектором $\vec{b}\ (-9;\ 12)$, если $|\vec{a}| = 5$.

557. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A\ (-1;\ 2)$, $B\ (3;\ 5)$, $C\ (14;\ 6)$, $D\ (2;\ -3)$ является трапецией.

558. Докажите, что точки $A\ (-1;\ 3)$, $B\ (4;\ -7)$, $D\ (-2;\ 5)$ лежат на одной прямой.

559. Даны векторы $\vec{a}\ (1;\ -4)$, $\vec{b}\ (0;\ 3)$, $\vec{c}\ (2;\ -17)$. Найдите такие числа x и y, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

560. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На стороне BC отметили точку K так, что $BK : KC = 2 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{OK}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

561. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O так, что $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 4 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

562. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки K и F так, что $AK : KB = 1 : 2$ и $BF : FC = 2 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{KF}$ через векторы $\overrightarrow{BK} = \vec{m}$, $\overrightarrow{CF} = \vec{n}$.

563. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили соответственно точки M и N так, что $AM : MC = 1 : 3$ и $BN : NC = 4 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NM}$ через векторы $\overrightarrow{BN} = \vec{k}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{p}$.

564. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Выразите вектор $\overrightarrow{BM}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

565. С помощью векторов докажите теорему о средней линии треугольника.

566. Пусть точки M_1 и M_2 – середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}\right)$.

567. Используя задачу 566, докажите теорему о средней линии трапеции.

568. Пусть точки M и N – соответственно середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$. Используя задачу 566, докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$.

569. Пусть точки M и N – соответственно середины диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Используя задачу 566, докажите, что $MN \parallel AD$.

570. На стороне AC треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : MC = 2 : 3$. Докажите, что $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

571. На стороне BC треугольника ABC отметили точку D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Докажите, что $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

572. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника.

573. Пусть точки M_1 и M_2 – середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что середины отрезков A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2 лежат на одной прямой.

574. На стороне AD и на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки M и N так, что $AM = \frac{1}{5}AD$ и $AN = \frac{1}{6}AC$. Докажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

Упражнения для повторения

575. Меньшее основание и боковая сторона равнобокой трапеции равны 12 см. Чему равна средняя линия трапеции, если один из её углов равен 60°?

576. Диагонали параллелограмма равны 6 см и 16 см, а одна из сторон – 7 см. Найдите угол между диагоналями параллелограмма и его площадь.

577. Найдите длину хорды окружности радиуса R, концы которой разбивают эту окружность на две дуги, длины которых относятся как 2 : 1.

Когда сделаны уроки

Применение векторов

Применяя векторы к решению задач, часто используют такую лемму.

Лемма

Пусть M — такая точка отрезка AB, что $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ (рис. 130)**. Тогда для любой точки X выполняется равенство: $\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$.**

Доказательство

Имеем: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AM}$.

Поскольку $AM = \frac{m}{m+n}AB$, то $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Запишем $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, то получаем:

$$\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}\right);$$

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}. \blacktriangleleft$$

Заметим, что эта лемма является обобщением ключевой задачи 2 § 15.

Задача 1. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC и X — произвольная точка (рис. 131). Докажите, что $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$.

Рис. 130

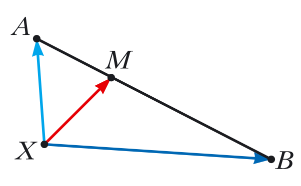
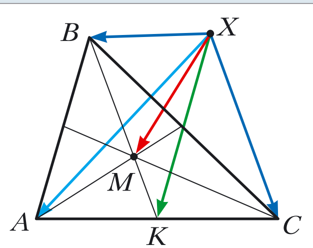


Рис. 131



Решение. Пусть точка K — середина отрезка AC. Имеем: $BM : MK = 2 : 1$. Тогда, используя лемму, можно записать:

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right). ◄$$

Докажем векторное равенство, связывающее две замечательные точки треугольника.

Теорема

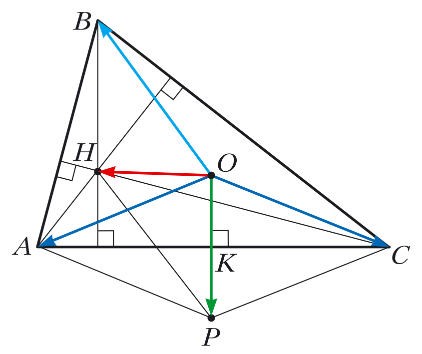
Если точка H — ортоцентр треугольника ABC, а точка O — центр его описанной окружности, то

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \quad (*)$$

Доказательство

Опустим из точки O перпендикуляр OK на сторону AC треугольника ABC (рис. 132). В курсе геометрии 8 класса было доказано, что $BH = 2OK$.

Рис. 132



На луче OK отметим точку P такую, что $OK = KP$. Тогда $BH = OP$. Так как $BH \parallel OP$, то четырёхугольник $HBOP$ — параллелограмм.

По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}$.

Поскольку точка K является серединой отрезка AC, то в четырёхугольнике $AOCP$ диагонали точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, этот четырёхугольник — параллелограмм. Отсюда $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Имеем: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. ◄

Обратимся к векторному равенству $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Так как X — произвольная точка, то равенство остаётся справедливым, если в качестве точки X выбрать точку O — центр описанной окружности треугольника ABC.

Имеем: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Учитывая равенство (*), получаем: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}$.

Это равенство означает, что точки O, M и H лежат на одной прямой, которую называют **прямой Эйлера**. Напомним, что это замечательное свойство было доказано в курсе геометрии 8 класса, но другим способом.

§ 16. Скалярное произведение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два ненулевых и несонаправленных вектора (рис. 133). От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Величину угла AOB будем называть **углом между векторами** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Рис. 133

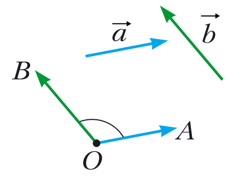


Рис. 134

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Например, на рисунке 133 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$, а на рисунке 134 $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 180°$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то также считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Следовательно, для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место неравенство: $0° \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant 180°$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. Пишут: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Вы умеете складывать и вычитать векторы, умножать вектор на число. Также из курса физики вы знаете, что если под действием постоянной силы $\vec{F}$ тело переместилось из точки A в точку B (рис. 135), то совершённая механическая работа равна $|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, где $\varphi = \angle(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$.

Рис. 135

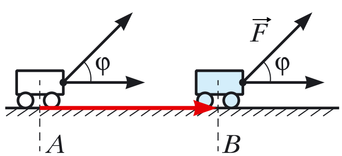
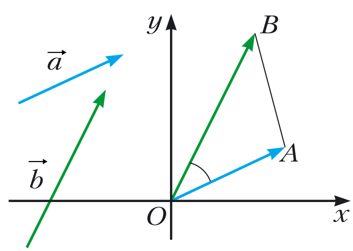


Рис. 136



Этот факт подсказывает, что целесообразно ввести ещё одно действие над векторами.

Определение

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Имеем:

$$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})}$$

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то очевидно, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пусть $\vec{a} = \vec{b}$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называют **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^2$.

Мы получили, что $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, т. е. ***скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля***.

Теорема 16.1

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Доказательство

Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$. Докажем, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Имеем: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$. Отсюда $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$.

Пусть теперь $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Докажем, что $\vec{a} \perp \vec{b}$. Запишем $|\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Поскольку $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Отсюда $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, т. е. $\vec{a} \perp \vec{b}$. ◄

Теорема 16.2

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\vec{a}(a_1; a_2)}$ и $\boldsymbol{\vec{b}(b_1; b_2)}$ можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

Доказательство

Сначала рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

Отложим от начала координат векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 136). Тогда $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle AOB$.

Применим теорему косинусов к треугольнику AOB:
$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB$.

Отсюда $OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2)$.

Поскольку $|\vec{a}| = OA$ и $|\vec{b}| = OB$, то $OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Кроме того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$. Отсюда $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$.

Имеем: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2\right)$. Воспользовавшись формулой нахождения модуля вектора по его координатам, запишем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left(a_1^2 + a_2^2\right) + \left(b_1^2 + b_2^2\right) - \left(b_1 - a_1\right)^2 - \left(b_2 - a_2\right)^2\right).$$

Упрощая выражение, записанное в правой части последнего равенства, получаем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то очевидно, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$, т. е. $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$.

Если $k > 0$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Имеем: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{a}) = |\vec{a}||k\vec{a}| \cos 0° = |k||\vec{a}|^2 = k\left(a_1^2 + a_2^2\right) =$
$= a_1 \cdot ka_1 + a_2 \cdot ka_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Случай, когда $k < 0$, рассмотрите самостоятельно. ◄

Следствие

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ можно вычислить по формуле

$$\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \qquad (*)$$

Доказательство

Из определения скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует, что $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Воспользовавшись теоремой 16.2 и формулой нахождения модуля вектора по его координатам, получаем формулу (*). ◄

С помощью теоремы 16.2 легко доказать следующие **свойства скалярного произведения векторов**.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Для доказательства этих свойств достаточно выразить через координаты векторов скалярные произведения, записанные в правых и левых частях равенств, и сравнить их. Сделайте это самостоятельно.

Эти свойства вместе со свойствами сложения векторов и умножения вектора на число позволяют преобразовывать выражения, содержащие скалярное произведение векторов, аналогично тому, как мы преобразовываем алгебраические выражения.

Например,

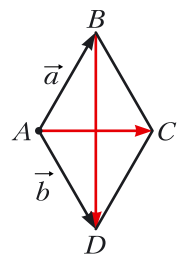
$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 =$$
$$= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

<u>Задача 1.</u> С помощью векторов докажите, что диагонали ромба перпендикулярны.

Решение. На рисунке 137 изображён ромб $ABCD$.

Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Очевидно, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. По правилу параллелограмма: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$. Отсюда $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b}^2 - \vec{a}^2 = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$. Следовательно, $AC \perp BD$. ◀

Рис. 137



<u>Задача 2.</u> Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Найдите $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Решение. Поскольку скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то можно записать: $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (2\vec{a} - 3\vec{b})^2$. Отсюда

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} =$$
$$= \sqrt{4|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) + 9|\vec{b}|^2} = \sqrt{36 + 18 + 9} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.$$

Ответ: $3\sqrt{7}$. ◀

Задача 3. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 30°$. Найдите медиану BM.

Решение. Применяя ключевую задачу 2 § 15, запишем: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$ (рис. 138). Отсюда

$$\overrightarrow{BM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2\right) =$$

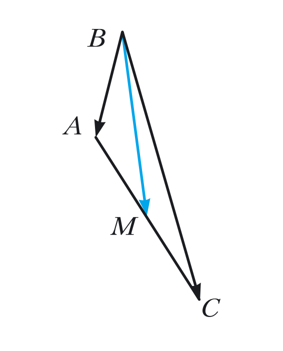
$$= \frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{BA}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos\angle ABC + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(16 + 48\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 108\right) = 49.$$

Следовательно, $BM^2 = 49$; $BM = 7$ см.

Ответ: 7 см. ◄

Рис. 138



1. Опишите, как можно построить угол, величина которого равна углу между двумя ненулевыми и несонаправленными векторами.
2. Чему равен угол между двумя сонаправленными векторами?
3. Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если хотя бы один из них нулевой?
4. Как обозначают угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
5. В каких пределах измеряют угол между любыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
6. Какие векторы называют перпендикулярными?
7. Что называют скалярным произведением двух векторов?
8. Что называют скалярным квадратом вектора?
9. Чему равен скалярный квадрат вектора?
10. Сформулируйте условие перпендикулярности двух ненулевых векторов.
11. Что следует из равенства $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$?
12. Как найти скалярное произведение векторов, если известны их координаты?
13. Как найти косинус угла между двумя ненулевыми векторами, если известны их координаты?
14. Запишите свойства скалярного произведения векторов.

Практические задания

578. Постройте угол, величина которого равна углу между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 139).

579. Постройте угол, величина которого равна углу между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ (рис. 140).

580. На рисунке 141 изображён вектор $\vec{a}$ (длина стороны клетки равна 0,5 см). Отложите от точки A вектор $\vec{b}$ такой, что $|\vec{b}| = 3$ см и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Сколько решений имеет задача?

Рис. 139

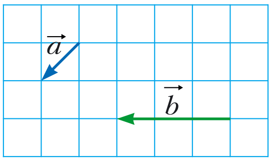


Рис. 140

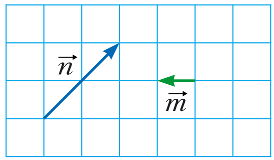
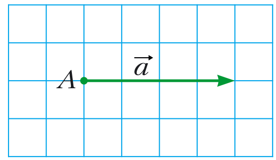


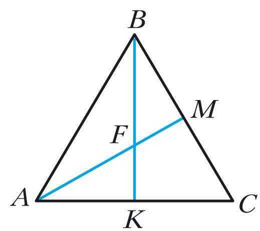
Рис. 141



Упражнения

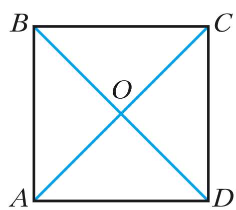
581. На рисунке 142 изображён равносторонний треугольник ABC, медианы которого AM и BK пересекаются в точке F. Найдите угол между векторами: 1) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AM}$; 4) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$; 5) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BK}$; 6) $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BK}$; 7) $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Рис. 142



582. На рисунке 143 изображён квадрат $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Найдите угол между векторами: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{CB}$; 5) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Рис. 143



583. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$;

2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$;

3) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$;

4) $|\vec{a}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{b}| = 6$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$;

5) $|\vec{a}| = 0{,}3$, $|\vec{b}| = 0$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 137°$.

584. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если:

1) $|\vec{m}| = 7\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 4$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$;

2) $|\vec{m}| = 8$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150°$.

585. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

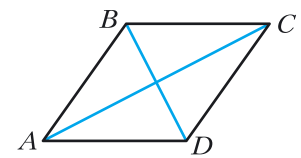
1) $\vec{a}\,(2; -1)$, $\vec{b}\,(1; -3)$; 2) $\vec{a}\,(-5; 1)$, $\vec{b}\,(2; 7)$; 3) $\vec{a}\,(1; -4)$, $\vec{b}\,(8; 2)$.

586. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если:

1) $\vec{m}\,(3; -2)$, $\vec{n}\,(1; 0)$; 2) $\vec{m}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{n}\,(6; 9)$.

587. На рисунке 144 изображён ромб $ABCD$, в котором $AB = 6$ см, $\angle ABC = 120°$. Найдите скалярное произведение векторов: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; 4) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; 5) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$; 6) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Рис. 144



588. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = 2$ см. Найдите скалярное произведение векторов: 1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

589. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}\,(1; -2)$ и $\vec{b}\,(2; -3)$.

590. Известно, что скалярное произведение векторов является: 1) положительным числом; 2) отрицательным числом. Определите вид угла между векторами.

591. Найдите работу силы величиной в 6 Н по перемещению тела на расстояние 7 м, если угол между направлениями силы и перемещения равен 60°.

592. В равностороннем треугольнике ABC, сторона которого равна 1, медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Вычислите:

1) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}$; 2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA_1}$.

593. Пусть точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, сторона которого равна 1. Вычислите:

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{ED}$; 4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

594. При каком значении x векторы $\vec{a}\,(3; x)$ и $\vec{b}\,(1; 9)$ перпендикулярны?

595. Известно, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Докажите, что векторы $\vec{a}\,(-x; y)$ и $\vec{b}\,(y; x)$ перпендикулярны.

596. При каких значениях x векторы $\vec{a}\,(2x; -3)$ и $\vec{b}\,(x; 6)$ перпендикулярны?

597. При каком значении y скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(4;\ y)$ и $\vec{b}\,(3;\ -2)$ равно 14?

598. При каких значениях x угол между векторами $\vec{a}\,(2;\ 5)$ и $\vec{b}\,(x;\ 4)$: 1) острый; 2) тупой?

599. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a}\,(3;\ -4)$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=-100$.

600. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и $|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$. При каких значениях x векторы $\vec{a}+x\vec{b}$ и $\vec{a}-x\vec{b}$ перпендикулярны?

601. Векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

602. Известно, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a},\ \vec{b})=45^\circ$. Найдите скалярное произведение $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$.

603. Найдите скалярное произведение $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\ \vec{b})=120^\circ$.

604. Известно, что $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\ \vec{b})=150^\circ$. Найдите $|2\vec{a}+5\vec{b}|$.

605. Известно, что $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=2$, $\angle(\vec{m},\ \vec{n})=60^\circ$. Найдите $|2\vec{m}-3\vec{n}|$.

606. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A\ (3;\ -2)$, $B\ (4;\ 0)$, $C\ (2;\ 1)$, $D\ (1;\ -1)$ является прямоугольником.

607. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A\ (-1;\ 4)$, $B\ (-2;\ 5)$, $C\ (-1;\ 6)$, $D\ (0;\ 5)$ является квадратом.

608. Найдите косинусы углов треугольника с вершинами $A\ (1;\ 6)$, $B\ (-2;\ 3)$, $C\ (2;\ -1)$.

609. Найдите углы треугольника с вершинами $A\ (0;\ 6)$, $B\ (4\sqrt{3};\ 6)$, $C\ (3\sqrt{3};\ 3)$.

610. Докажите, что для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $-|\vec{a}||\vec{b}|\leqslant\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}||\vec{b}|$.

611. Определите взаимное расположение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$.

612. Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $(\vec{m}+3\vec{n})\cdot(\vec{m}-\vec{n})=-11$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$.

613. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=\frac{3}{2}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$.

614. В треугольнике ABC известно, что $\angle C=90^\circ$, $AC=1$, $BC=\sqrt{2}$. Докажите, что его медианы AK и CM перпендикулярны.

615. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке O. Известно, что $OB = OC = 1$, $OA = 2$, $OD = 3$. Найдите угол между прямыми AB и DC.

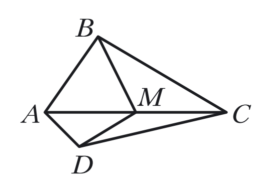
616. В треугольнике ABC проведена медиана BD. Известно, что $\angle DBC = 90°$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Найдите $\angle ABD$.

617. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABMN$ и $BCKF$. Докажите, что медиана BD треугольника ABC перпендикулярна прямой MF.

Упражнения для повторения

618. Точка M — середина диагонали AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ (рис. 145). Докажите, что четырёхугольники $ABMD$ и $CBMD$ равновелики.

Рис. 145



619. Перпендикуляр, проведённый из точки пересечения диагоналей ромба, делит его сторону на отрезки, один из которых на 7 см больше другого. Найдите периметр ромба, если его высота равна 24 см.

620. На высоте правильного треугольника со стороной $6\sqrt{3}$ см как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги этой окружности, расположенной вне треугольника.

Когда сделаны уроки

Разложение вектора по двум данным неколлинеарным векторам

При решении ряда задач этой главы вам приходилось выражать некоторый вектор $\vec{c}$ через два данных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см., например, № 535–537, 547, 560, 561 и др.). Вообще имеет место следующая теорема.

Теорема

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Тогда для любого вектора $\vec{c}$ существует единственная пара чисел $(x; y)$ такая, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Эту теорему называют теоремой о разложении вектора по двум данным неколлинеарным векторам.

Задание № 4 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Какая из данных величин является векторной?
А) масса Б) объём В) скорость Г) время

2. Чему равен модуль вектора, начало и конец которого совпадают?
А) 1 Б) –1 В) 5 Г) 0

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Какое из равенств является верным?
А) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ В) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$
Б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Г) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

4. Известно, что $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Какое из данных утверждений верно?
А) точка B – середина отрезка AM
Б) точка A – середина отрезка MB
В) точка M – середина отрезка AB
Г) точка M – вершина равнобедренного треугольника AMB

5. Даны точки A (–3; 4), B (1; –8). Точка M – середина отрезка AB. Чему равны координаты вектора $\overrightarrow{AM}$?
А) (2; –6) Б) (–2; 6) В) (–2; –6) Г) (6; –2)

6. При каком значении x векторы $\vec{a}$ $(x; 2)$ и $\vec{b}$ (–4; 8) коллинеарны?
А) –1 Б) 1 В) 0 Г) $\frac{1}{2}$

7. Какое из данных равенств верно?
А) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ В) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$
Б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ Г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$

8. Дан вектор $\vec{a}$ $(\sqrt{3}; -2)$. Какой из векторов равен вектору $\sqrt{3}\vec{a}$?
А) $\vec{m}$ $(1; -2\sqrt{3})$ В) $\vec{p}$ $(3; -2)$
Б) $\vec{n}$ $(-3; -2\sqrt{3})$ Г) $\vec{q}$ $(3; -2\sqrt{3})$

9. Точка M – середина стороны BC треугольника ABC. Какое из данных равенств верно?
А) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ В) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
Б) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ Г) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

10. Чему равно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ (2; –3) и $\vec{b}$ (3; –2)?
А) 12 Б) –12 В) 0 Г) 6

11. При каком значении x векторы $\vec{a}\,(2x; -3)$ и $\vec{b}\,(1; 4)$ перпендикулярны?

А) -6 Б) 3 В) 12 Г) 6

12. Чему равен косинус угла между векторами $\vec{a}\,(5; -12)$ и $\vec{b}\,(-3; 4)$?

А) $\frac{63}{65}$ Б) $\frac{65}{63}$ В) $-\frac{63}{65}$ Г) $\frac{1}{2}$

Итоги главы 4

Вектор

Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка — его концом, то такой отрезок называют направленным отрезком или вектором.

Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

Равные векторы

Ненулевые векторы называют равными, если их модули равны и они сонаправленны. Любые два нулевых вектора равны.

Нахождение координат вектора

Если точки $A\,(x_1; y_1)$ и $B\,(x_2; y_2)$ соответственно являются началом и концом вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ равны соответственно первой и второй координатам вектора $\vec{a}$.

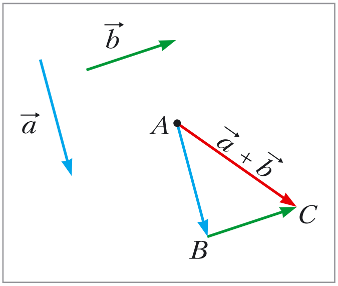
Модуль вектора

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Правила сложения двух векторов

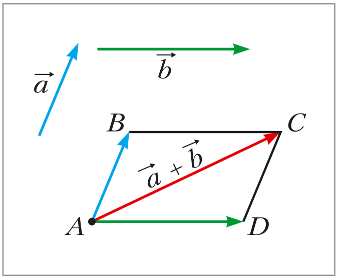
Правило треугольника

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, а от точки B — вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ — сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Правило параллелограмма

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. Построим параллелограмм $ABCD$. Тогда искомая сумма $\vec{a}+\vec{b}$ равна вектору $\overrightarrow{AC}$.



Координаты суммы векторов

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1;\ a_2)$ и $(b_1;\ b_2)$, то координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны $(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$.

Свойства сложения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняются равенства:

1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — переместительное свойство;
3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ — сочетательное свойство.

Разность векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Координаты разности векторов

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1;\ a_2)$ и $(b_1;\ b_2)$, то координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$ равны $(a_1-b_1;\ a_2-b_2)$.

Противоположные векторы

Два ненулевых вектора называют противоположными, если их модули равны и векторы противоположно направлены.

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:

1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;
2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то считают, что $k\vec{a} = \vec{0}$.

Свойства коллинеарных векторов

- Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.
- Если векторы $\vec{a}\ (a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}\ (b_1;\ b_2)$ коллинеарны, причём $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $b_1 = ka_1$ и $b_2 = ka_2$.

Свойства умножения вектора на число

- Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $(ka_1;\ ka_2)$.
- Для любых чисел k и m и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы равенства:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ — сочетательное свойство;
2) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ — первое распределительное свойство;
3) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — второе распределительное свойство.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Условие перпендикулярности двух векторов

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Нахождение скалярного произведения векторов

Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ можно вычислить по формуле: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Косинус угла между двумя векторами

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ можно вычислить по формуле:

$$\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$;

3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$.

Глава 5. Геометрические преобразования

В этой главе вы узнаете, что такое преобразование фигуры. Познакомитесь с такими видами преобразований: параллельный перенос, центральная симметрия, осевая симметрия, поворот, гомотетия, подобие.

Вы научитесь применять свойства преобразований при решении задач и доказательстве теорем.

§ 17. Движение (перемещение) фигуры. Параллельный перенос

Пример 1. На рисунке 146 изображены отрезок AB, прямая a и точка O, не принадлежащая ни прямой a, ни прямой AB. Каждой точке X отрезка AB поставим в соответствие точку X_1 прямой a так, чтобы точки O, X и X_1 лежали на одной прямой. Точке A будет соответствовать точка A_1, точке B – точка B_1. Понятно, что все такие точки X_1 образуют отрезок A_1B_1.

Мы указали правило, с помощью которого каждой точке X отрезка AB поставлена в соответствие единственная точка X_1 отрезка A_1B_1. В этом случае говорят, что отрезок A_1B_1 получен в результате **преобразования** отрезка AB.

Пример 2. На рисунке 147 изображены полуокружность AB и прямая a, параллельная диаметру AB. Каждой точке X полуокружности поставим в соответствие точку X_1 прямой a так, чтобы прямая XX_1 была перпендикулярна прямой a. Понятно, что все такие точки X_1 образуют

Рис. 146

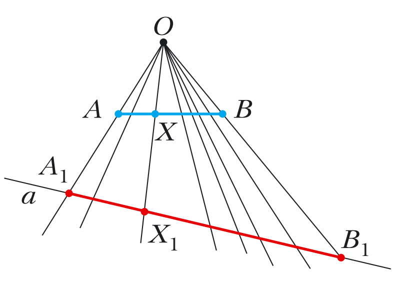
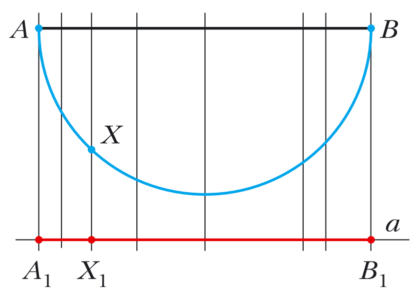
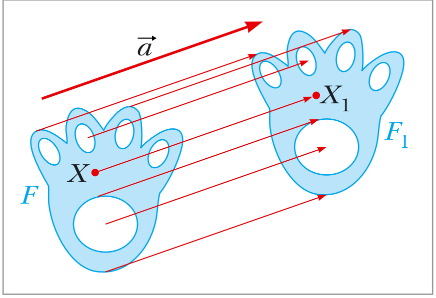


Рис. 147



отрезок A_1B_1. В этом случае говорят, что отрезок A_1B_1 получен в результате преобразования полуокружности AB.

Рис. 148



<u>**Пример 3.**</u> Пусть даны некоторая фигура F и вектор $\vec{a}$ (рис. 148). Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1 такую, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (см. рис. 148). Такое преобразование фигуры F называют **параллельным переносом на вектор $\vec{a}$**.

Обобщим приведённые примеры.

Пусть задана некоторая фигура F. Каждой точке фигуры F поставим в соответствие (сопоставим) по определённому правилу некоторую точку. Все сопоставленные точки образуют фигуру F_1. Говорят, что **фигура F_1 получена в результате преобразования фигуры F**. При этом фигуру F_1 называют **образом фигуры F**, а фигуру F называют **прообразом фигуры F_1**.

Так, в примере 1 отрезок A_1B_1 является образом отрезка AB. Точку X_1 называют **образом точки X**. Отрезок AB – это прообраз отрезка A_1B_1.

Обратим внимание на то, что в примере 3 фигура F равна своему образу F_1. Преобразования, описанные в примерах 1 и 2, таким свойством не обладают.

Какими же свойствами должно обладать преобразование, чтобы образ и прообраз были равными фигурами? Оказывается, что достаточно лишь одного свойства: преобразование должно сохранять расстояние между точками, т. е. если A и B – произвольные точки фигуры F, а A_1 и B_1 – их образы, то должно выполняться равенство $AB = A_1B_1$.

Определение

Преобразование фигуры F, сохраняющее расстояние между точками, называют движением (перемещением) фигуры F.

Если каждой точке X фигуры F поставлена в соответствие эта же точка X, то такое преобразование фигуры F называют **тождественным**. При тождественном преобразовании образом фигуры F является сама фигура F. Очевидно, что тождественное преобразование является движением.

Мы давно используем понятие «равенство фигур», хотя не давали ему строгого определения.

На то, что движение связано с равенством фигур, указывают следующие свойства движения.

Если преобразование является движением, то:

– *образом прямой является прямая*;

– *образом отрезка является отрезок, равный данному*;

– *образом угла является угол, равный данному*;

– *образом треугольника является треугольник, равный данному.*

Доказательство этих свойств выходит за рамки рассматриваемого курса геометрии.

Свойства движения подсказывают следующее определение.

Определение

Две фигуры называют равными, если существует движение, при котором одна из данных фигур является образом другой.

Запись $F = F_1$ означает, что фигуры F и F_1 равны.

Если существует движение, при котором фигура F_1 является образом фигуры F, то обязательно существует движение, при котором фигура F является образом фигуры F_1. Такие движения называют **взаимно обратными**.

Замечание. Ранее равными фигурами мы называли такие фигуры, которые совпадали при наложении. Термин «наложение» интуитивно понятен, и в нашем представлении он связывается с наложением реальных тел. Но геометрические фигуры нельзя наложить в буквальном смысле этого слова. Теперь наложение фигуры F на фигуру F_1 можно рассматривать как движение фигуры F, при котором её образом будет фигура F_1.

Термин «движение» также ассоциируется с определённым физическим действием: изменением положения тела без деформации. Именно с этим связано появление этого термина в математике. Однако в геометрии предметом исследования является не процесс, происходящий во времени, а лишь свойства фигуры и её образа.

То, что изображённые на рисунке 148 фигуры F и F_1 равны, понятно из наглядных соображений. Строгое обоснование этого факта даёт следующая теорема.

Теорема 17.1

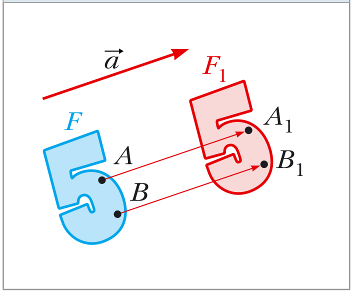
(свойство параллельного переноса)

Параллельный перенос является движением.

Доказательство

Пусть $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$ — произвольные точки фигуры F, точки A_1 и B_1 — их соответствующие образы при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\ (m; n)$ (рис. 149). Докажем, что $AB = A_1B_1$.

Рис. 149



Имеем: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$. Векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ имеют координаты $(m; n)$. Следовательно, координатами точек A_1 и B_1 являются соответственно пары чисел $(x_1 + m; y_1 + n)$ и $(x_2 + m; y_2 + n)$.

Найдём расстояние между точками A и B:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Найдём расстояние между точками A_1 и B_1:

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 + m - x_1 - m)^2 + (y_2 + n - y_1 - n)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

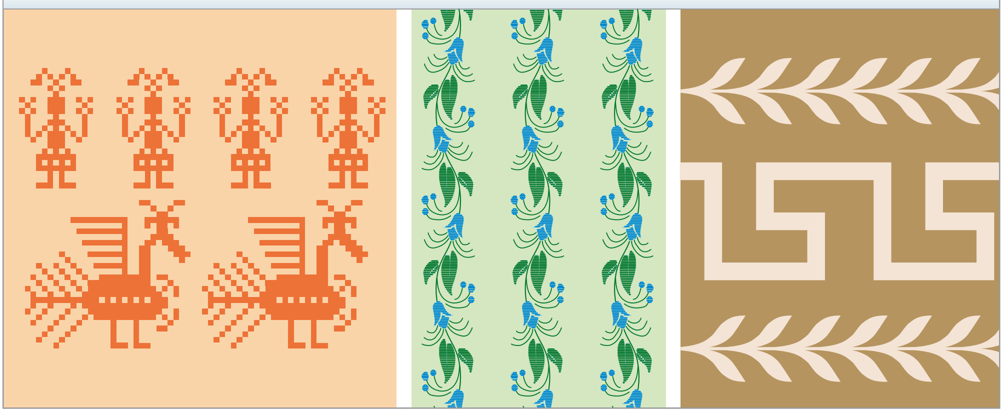
Итак, мы показали, что $AB = A_1B_1$, т. е. параллельный перенос сохраняет расстояние между точками. ◄

Следствие

Если фигура F_1 — образ фигуры F при параллельном переносе, то $F_1 = F$.

Это свойство используется при создании тканей, обоев, покрытий для пола и т. п. (рис. 150).

Рис. 150



Если фигура F_1 является образом фигуры F при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$, то фигура F является образом фигуры F_1 при параллельном переносе на вектор $-\vec{a}$ (рис. 151). Параллельные переносы на векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ являются взаимно обратными движениями.

Задача 1. Каждой точке $X\ (x; y)$ фигуры F ставится в соответствие точка $X_1\ (x + m; y + n)$, где m и n — заданные числа. Докажите, что такое преобразование фигуры F является параллельным переносом на вектор $\vec{a}\ (m; n)$.

Решение. Рассмотрим вектор $\vec{a}\ (m; n)$. Заметим, что координаты вектора $\overrightarrow{XX_1}$ равны $(m; n)$, т. е. $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Следовательно, описанное преобразование фигуры F — параллельный перенос на вектор $\vec{a}$. ◄

Задача 2. Точка $A_1\ (-2; 3)$ является образом точки $A\ (-1; 2)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$ и координаты образа точки $B\ (-7; -3)$.

Решение. Из условия следует, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. Отсюда $\vec{a}\ (-1; 1)$.

Пусть $B_1\ (x; y)$ — образ точки $B\ (-7; -3)$. Тогда $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, т. е. $x + 7 = -1$ и $y + 3 = 1$.

Отсюда $x = -8$, $y = -2$. ◄

Задача 3. Даны угол ABC и прямая p, не параллельная ни одной из сторон этого угла (рис. 152). Постройте прямую p_1, параллельную прямой p, так, чтобы стороны угла отсекали на ней отрезок заданной длины a.

Решение. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{MN}$ такой, что $MN \parallel p$ и $|\overrightarrow{MN}| = a$ (рис. 153). Построим луч B_1A_1, являющийся образом луча BA при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$. Обозначим точку пересечения лучей BC и B_1A_1 буквой E. Пусть F — прообраз точки E при рассматриваемом параллельном переносе. Тогда $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{MN}$, т. е. $|\overrightarrow{FE}| = a$ и $FE \parallel p$.

Рис. 151

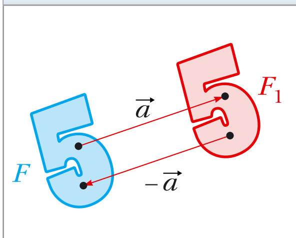


Рис. 152

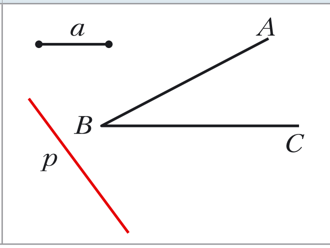
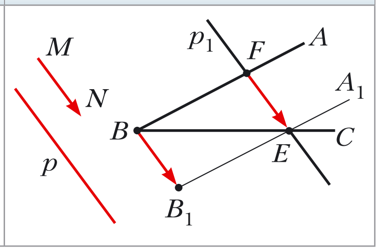


Рис. 153



Приведённые рассуждения подсказывают следующий алгоритм построения:

1) найти образ луча BA при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$;

2) отметить точку пересечения луча BC с построенным образом;

3) через найденную точку провести прямую p_1, параллельную прямой p. Прямая p_1 будет искомой. ◄

1. Опишите, что такое преобразование фигуры.
2. Приведите примеры преобразований фигур.
3. Опишите преобразование фигуры F, которое называют параллельным переносом на вектор $\vec{a}$.
4. В каком случае фигуру F_1 называют образом фигуры F, а фигуру F — прообразом фигуры F_1?
5. Какое преобразование фигуры называют движением?
6. Какое преобразование фигуры называют тождественным?
7. Сформулируйте свойства движения.
8. Какие две фигуры называют равными?
9. Опишите, какие движения называют взаимно обратными.
10. Сформулируйте свойство параллельного переноса.
11. Какими движениями являются параллельные переносы на векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$?

Практические задания

621. На рисунке 154 изображены угол AOB и прямая p, не параллельная его сторонам. Каждой точке X стороны OA поставлена в соответствие такая точка X_1 стороны OB, что $XX_1 \parallel p$ (точке O поставлена в соответствие точка O). Постройте образ точки M и прообраз точки K при данном преобразовании. Какая фигура является образом луча OA?

622. На рисунке 155 изображены отрезок AB и прямая a. Каждой точке X отрезка AB поставлено в соответствие основание перпендикуляра,

Рис. 154

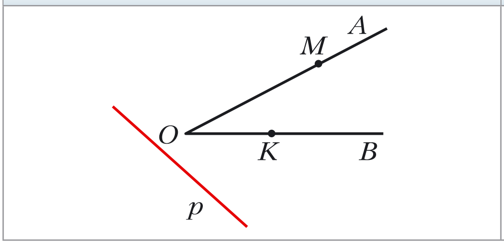
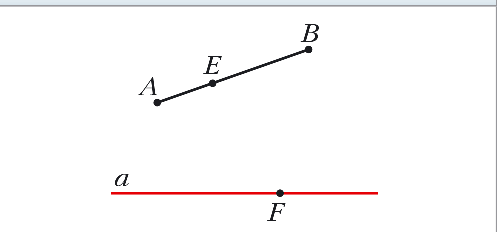


Рис. 155



опущенного из точки X на прямую a. Постройте образ точки E и прообраз точки F при данном преобразовании. Существуют ли точки прямой a, не имеющие прообраза? Постройте образ отрезка AB.

623. Постройте образы отрезка AB и луча OM при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 156).

624. На рисунке 157 прямая a является образом некоторой прямой при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$. Постройте прообраз прямой a.

625. Окружность с центром O_1 является образом окружности с центром O при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 158). Отложите вектор $\vec{a}$ от точки M.

Рис. 156

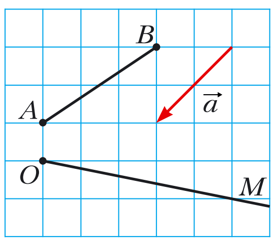


Рис. 157

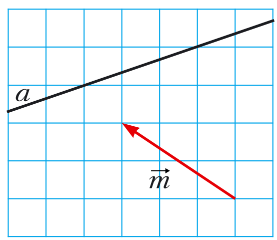
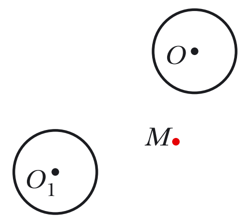


Рис. 158



626. Постройте образ параболы $y = x^2$ при параллельном переносе на вектор: 1) $\vec{a}\,(0; 2)$; 2) $\vec{b}\,(-1; 0)$; 3) $\vec{c}\,(-1; 2)$. Запишите уравнение образа параболы $y = x^2$.

627. Постройте образ окружности $x^2 + y^2 = 4$ при параллельном переносе на вектор: 1) $\vec{a}\,(2; 0)$; 2) $\vec{b}\,(0; -1)$; 3) $\vec{c}\,(2; -1)$. Запишите уравнение образа окружности $x^2 + y^2 = 4$.

628. Прямая a касается полуокружности AB с центром в точке O (рис. 159). Придумайте какое-нибудь преобразование, при котором прямая a является образом полуокружности AB с «выколотыми» точками A и B.

Рис. 159

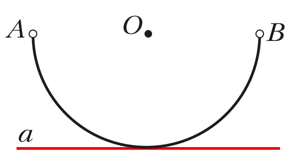
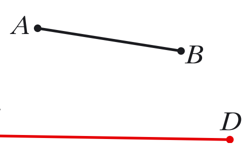


Рис. 160



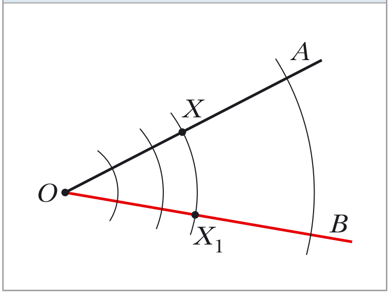
629. Придумайте какое-нибудь преобразование, при котором отрезок CD является образом отрезка AB (рис. 160).

Упражнения

630. Рассмотрим окружность радиуса r с центром в точке O. Каждой точке X окружности поставим в соответствие точку X_1, принадлежащую радиусу OX, такую, что $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Какая фигура является образом данной окружности? Является ли движением описанное преобразование?

631. Дан угол AOB (рис. 161). Каждой точке X стороны OA поставим в соответствие точку X_1, которая принадлежит стороне OB и лежит на окружности с центром O радиуса OX (точке O поставим в соответствие точку O). Какая фигура является образом стороны OA? Докажите, что описанное преобразование является движением.

Рис. 161



632. Дан угол MON. Каждой точке X стороны OM поставлена в соответствие такая точка X_1 стороны ON, что прямая XX_1 перпендикулярна биссектрисе угла MON (точке O соответствует точка O). Докажите, что описанное преобразование является движением.

633. Даны прямая a и отрезок AB, не имеющий с ней общих точек. Каждой точке X отрезка AB поставлено в соответствие основание перпендикуляра, опущенного из точки X на прямую a. При каком взаимном расположении прямой a и отрезка AB описанное преобразование является движением?

634. Точки A_1 и B_1 не принадлежат прямой AB и являются образами соответственно точек A и B при параллельном переносе. Докажите, что четырёхугольник AA_1B_1B — параллелограмм.

635. Точки A_1 и B_1 являются образами соответственно точек A и B при параллельном переносе. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AB = 5$ см.

636. Вектор $\vec{m}$ параллелен прямой a. Какая фигура является образом прямой a при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$?

637. Дан параллелограмм $ABCD$. Какой вектор задаёт параллельный перенос, при котором сторона AD является образом стороны BC?

638. Существует ли параллельный перенос, при котором сторона AB равностороннего треугольника ABC является образом стороны BC?

639. Найдите точки, являющиеся образами точек A $(-2; 3)$ и B $(1; -4)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ $(-1; -3)$.

640. Существует ли параллельный перенос, при котором образом точки A $(1; 3)$ является точка A_1 $(4; 0)$, а образом точки B $(-2; 1)$ — точка B_1 $(1; 4)$?

641. При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ $(2; -1)$ образом точки A является точка A_1 $(-3; 4)$. Найдите координаты точки A.

642. Точка M_1 $(x; 2)$ является образом точки M $(3; y)$ при параллельном переносе, при котором точка A $(2; 3)$ является образом начала координат. Найдите x и y.

643. Сколько существует параллельных переносов, при которых образом прямой a является: 1) прямая a; 2) прямая b, параллельная прямой a?

644. Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, принадлежащих сторонам прямоугольника. Опишите какое-нибудь преобразование, при котором образом этой фигуры является окружность.

645. Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, принадлежащих сторонам прямоугольника. Опишите какое-нибудь преобразование, при котором образом этой фигуры является фигура, состоящая из всех точек сторон ромба.

646. При преобразовании фигуры F её образом является эта же фигура F. Верно ли, что это преобразование является тождественным?

647. Даны точки A $(3; -2)$ и B $(5; -4)$. При параллельном переносе образом середины отрезка AB является точка M_1 $(-4; 3)$. Найдите образы точек A и B при таком параллельном переносе.

648. Точки A $(1; 3)$, B $(2; 6)$, C $(-3; 1)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. При параллельном переносе образом точки пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ является точка O_1 $(-2; -4)$. Найдите образы точек A, B, C и D при таком параллельном переносе.

649. Найдите уравнение окружности, являющейся образом окружности $x^2 + y^2 = 1$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ $(-3; 4)$.

650. Найдите уравнение параболы, являющейся образом параболы $y = x^2$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ $(2; -3)$.

651. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

652. Постройте трапецию по четырём сторонам.

653. Постройте отрезок, равный и параллельный данному отрезку AB, так, чтобы один его конец принадлежал данной прямой, а другой — данной окружности.

654. Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную данному отрезку AB.

655. Постройте четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно непараллельны, по четырём углам и двум противоположным сторонам.

656. В каком месте надо построить мост MN через реку, разделяющую два населённых пункта A и B (рис. 162), чтобы путь $AMNB$ был кратчайшим (берега реки считаем параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам реки)?

Упражнения для повторения

657. Через каждую вершину треугольника проведена прямая, параллельная противоположной стороне. Чему равен периметр образовавшегося треугольника, если периметр данного треугольника равен 18 см?

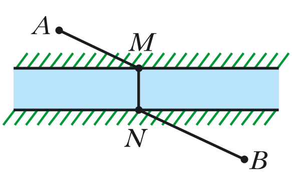
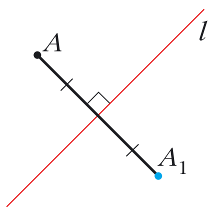
658. Докажите, что четырёхугольник с вершинами A (–3; –4), B (0; 3), C (7; 6) и D (4; –1) является ромбом, и найдите его площадь.

659. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит бóльшую из боковых сторон трапеции на отрезки 4 см и 25 см. Найдите площадь трапеции.

§ 18. Осевая симметрия

Определение

Точки A и A_1 называют симметричными относительно прямой l, если прямая l является серединным перпендикуляром отрезка AA_1 (рис. 163)**.**

Рис. 162	Рис. 163
	

Если точка A принадлежит прямой l, то её считают симметричной самой себе относительно прямой l.

Например, точки A и A_1, ординаты которых равны, а абсциссы — противоположные числа, симметричны относительно оси ординат (рис. 164).

Рассмотрим фигуру F и прямую l. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие симметричную ей относительно прямой l точку X_1. В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 165). Описанное преобразование фигуры F называют **осевой симметрией относительно прямой l**. Прямую l называют **осью симметрии**. Также говорят, что фигуры F и F_1 **симметричны относительно прямой** l.

Рис. 164

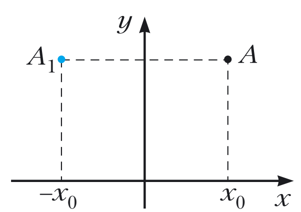
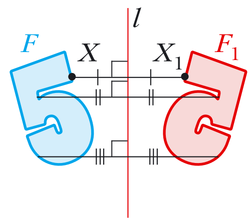


Рис. 165



Теорема 18.1
(свойство осевой симметрии)

Осевая симметрия является движением.

Доказательство

Выберем систему координат так, чтобы ось симметрии совпала с осью ординат. Пусть $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ — произвольные точки фигуры F. Тогда точки $A_1\ (-x_1;\ y_1)$ и $B_1(-x_2;\ y_2)$ — их соответствующие образы при осевой симметрии относительно оси ординат.

Имеем: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Получили, что $AB = A_1B_1$, т. е. осевая симметрия сохраняет расстояние между точками. Следовательно, осевая симметрия является движением. ◄

Следствие

Если фигуры F и F_1 симметричны относительно прямой, то $F = F_1$.

Определение

Фигуру называют симметричной относительно прямой l, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно прямой l, также принадлежит этой фигуре.

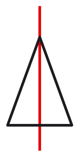
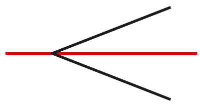
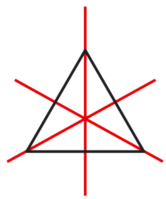
Прямую l называют **осью симметрии фигуры**. Также говорят, что **фигура имеет ось симметрии**.

Приведём примеры фигур, имеющих ось симметрии.

На рисунке 166 изображён равнобедренный треугольник. Прямая, содержащая его высоту, проведённую к основанию, является осью симметрии треугольника.

Любой угол имеет ось симметрии — это прямая, содержащая его биссектрису (рис. 167).

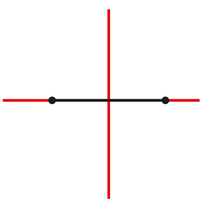
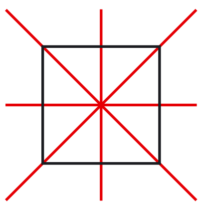
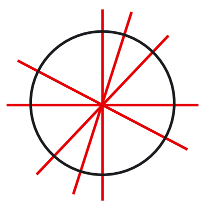
Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии (рис. 168).

Рис. 166	Рис. 167	Рис. 168
		

Две оси симметрии имеет отрезок: это его серединный перпендикуляр и прямая, содержащая этот отрезок (рис. 169).

Квадрат имеет четыре оси симметрии (рис. 170).

Есть фигуры, имеющие бесконечно много осей симметрии, например окружность. Любая прямая, проходящая через центр окружности, является её осью симметрии (рис. 171).

Рис. 169	Рис. 170	Рис. 171
		

Бесконечно много осей симметрии имеет и прямая: сама прямая и любая прямая, ей перпендикулярная, являются осями симметрии.

Задача 1. Начертили неравнобедренный треугольник ABC. Провели прямую l, содержащую биссектрису угла C. Потом рисунок стёрли, оставив только точки A и B и прямую l. Восстановите треугольник ABC.

Решение. Так как прямая l является осью симметрии угла ACB, то точка A_1 — образ точки A при симметрии относительно прямой l — принадлежит лучу CB. Тогда пересечением прямых l и BA_1 является вершина C искомого треугольника ABC (рис. 172). Эти соображения подсказывают, как построить искомый треугольник: строим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой l. Находим вершину C как точку пересечения прямых l и BA_1. ◄

Задача 2. Точка O принадлежит острому углу ABC (рис. 173). На сторонах BA и BC угла найдите такие точки E и F, чтобы периметр треугольника OEF был наименьшим.

Решение. Пусть точки O_1 и O_2 — образы точки O при симметриях относительно прямых BA и BC соответственно (рис. 174) и прямая O_1O_2 пересекает стороны BA и BC в точках E и F соответственно. Докажем, что точки E и F — искомые.

Рис. 172

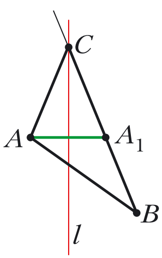


Рис. 173

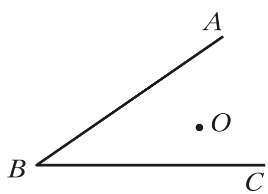
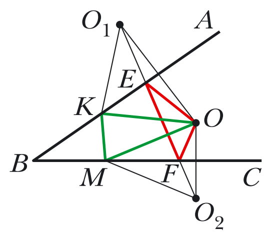


Рис. 174



Заметим, что отрезки EO_1 и EO симметричны относительно прямой BA. Следовательно, $EO_1 = EO$. Аналогично $FO = FO_2$. Тогда периметр треугольника OEF равен длине отрезка O_1O_2.

Пусть K и M — произвольные точки лучей BA и BC соответственно. Понятно, что $KO = KO_1$ и $MO = MO_2$. Тогда периметр треугольника KOM равен сумме $O_1K + KM + MO_2$. Однако $O_1K + KM + MO_2 \geqslant O_1O_2$. ◄

1. Какие точки называют симметричными относительно прямой l? Как называют прямую l?

2. Какие фигуры называют симметричными относительно прямой l?
3. Сформулируйте свойство осевой симметрии.
4. Каким свойством обладают фигуры, симметричные относительно прямой?
5. О какой фигуре говорят, что она имеет ось симметрии?
6. Приведите примеры фигур, имеющих ось симметрии.

Практические задания

660. Постройте образы фигур, изображённых на рисунке 175, при симметрии относительно прямой l.

661. Начертите треугольник. Постройте треугольник, симметричный ему относительно прямой, содержащей одну из его средних линий.

662. Точки A и B симметричны относительно прямой l (рис. 176). Постройте прямую l.

Рис. 175

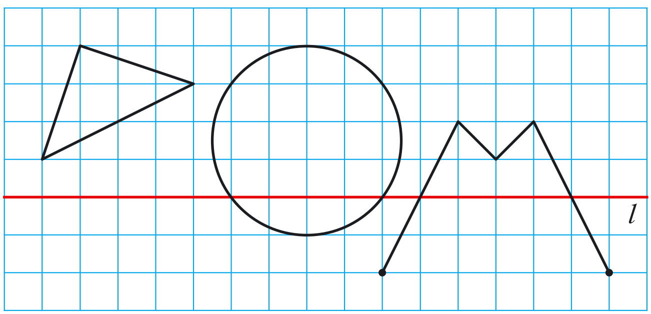


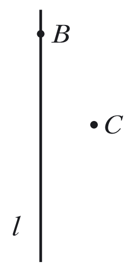
Рис. 176

663. Проведите пересекающиеся прямые a и a_1. Постройте прямую, относительно которой прямая a_1 будет симметрична прямой a. Сколько решений имеет задача?

664. Проведите параллельные прямые a и a_1. Постройте прямую, относительно которой прямая a_1 будет симметрична прямой a.

665. Постройте ромб $ABCD$ по его вершинам B и C и прямой l, содержащей его диагональ BD (рис. 177).

Рис. 177



666. Постройте равнобедренный треугольник ABC по вершине A, точке K, принадлежащей боковой стороне BC, и прямой, содержащей высоту, проведённую к основанию AB (рис. 178).

667. Посмотрите на рисунок 179 через горизонтально расположенную стеклянную пробирку, заполненную водой. Почему некоторые буквы во втором слове оказались перевёрнутыми, а в первом — нет?

668. Окружности с центрами O_1 и O_2 имеют две общие точки (рис. 180). С помощью только циркуля постройте окружности, симметричные данным относительно прямой AB.

Рис. 178

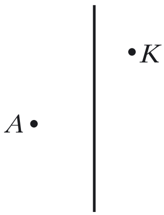
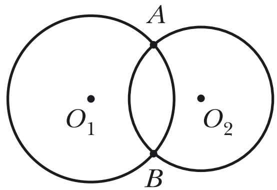


Рис. 179

СЕЗОН
ДОЖДЕЙ

Рис. 180

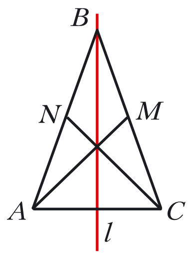


Упражнения

669. Прямая l проходит через середину отрезка AB. Обязательно ли точки A и B являются симметричными относительно прямой l?

670. На рисунке 181 изображены равнобедренный треугольник ABC и прямая l, содержащая его высоту, проведённую к основанию AC. Отрезки AM и CN — его медианы. Укажите образы точек A и B, медианы CN и стороны AC при симметрии относительно прямой l.

Рис. 181

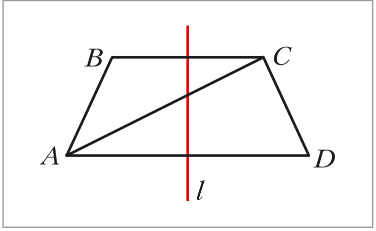


671. Докажите, что прямая, проходящая через середины оснований равнобокой трапеции, является её осью симметрии.

672. Докажите, что прямая, содержащая медиану равнобедренного треугольника, проведённую к основанию, является его осью симметрии.

673. На рисунке 182 изображены равнобокая трапеция $ABCD$ и прямая l, проходящая через середины её оснований. Укажите образы точек B и D, диагонали AC и основания BC при симметрии относительно прямой l.

Рис. 182



674. Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

675. Докажите, что прямые, проходящие через середины противоположных сторон прямоугольника, являются его осями симметрии.

676. Точки A_1 и B_1 являются соответственно образами точек A и B при осевой симметрии. Известно, что $AB = 5$ см. Найдите A_1B_1.

677. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии.

678. Найдите координаты точек, симметричных точкам A $(-2; 1)$ и B $(0; -4)$ относительно осей координат.

679. Точки A $(x; 3)$ и B $(-2; y)$ симметричны относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат. Найдите x и y.

680. Образом прямой a при симметрии относительно прямой l является сама прямая a. Каково взаимное расположение прямых a и l?

681. Докажите, что треугольник, имеющий ось симметрии, является равнобедренным.

682. Докажите, что треугольник, имеющий две оси симметрии, является равносторонним. Может ли треугольник иметь ровно две оси симметрии?

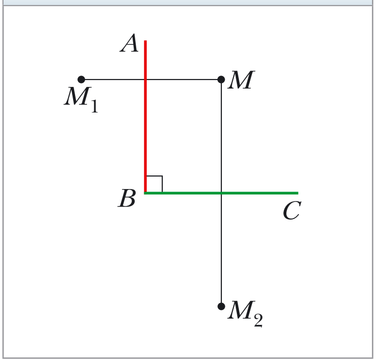
683. Докажите, что если параллелограмм имеет ровно две оси симметрии, то он является или прямоугольником, или ромбом.

684. Докажите, что если четырёхугольник имеет четыре оси симметрии, то он является квадратом.

685. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что точки A и B симметричны относительно прямой O_1O_2.

686. Точка M принадлежит прямому углу ABC (рис. 183). Точки M_1 и M_2 — образы точки M при симметрии относительно прямых BA и BC соответственно. Докажите, что точки M_1, B, M_2 лежат на одной прямой.

Рис. 183



687. Найдите координаты точек, симметричных точкам A (–2; 0) и B (3; –1) относительно прямой, содержащей биссектрисы: 1) первого и третьего координатных углов; 2) второго и четвёртого координатных углов.

688. Точки A (x; –1) и B (y; 2) симметричны относительно прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов. Найдите x и y.

689. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a. На прямой a найдите такую точку X, чтобы прямая a содержала биссектрису угла AXB.

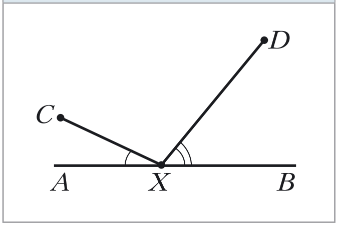
690. Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Найдите на прямой a такую точку X, чтобы лучи XA и XB образовывали с этой прямой равные углы.

691. Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Найдите на прямой a такую точку X, чтобы сумма $AX + XB$ была наименьшей.

692. Постройте треугольник ABC по двум сторонам AB и AC ($AB < AC$) и разности углов B и C.

693. Точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB (рис. 184). На прямой AB найдите такую точку X, чтобы $\angle AXC = \frac{1}{2}\angle DXB$.

Рис. 184



§ 19. Центральная симметрия. Поворот

Определение

Точки A и A_1 называют симметричными относительно точки O, если точка O является серединой отрезка AA_1 (рис. 185)**.**

Точку O считают симметричной самой себе.

Например, точки A и A_1, у которых и абсциссы, и ординаты — противоположные числа, симметричны относительно начала координат (рис. 186).

Рассмотрим фигуру F и точку O (рис. 187). Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие симметричную ей относительно точки O точку X_1.

В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (см. рис. 187). Описанное преобразование фигуры F называют **центральной симметрией относительно точки O**. Точку O называют **центром**

Рис. 185

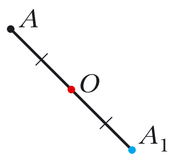


Рис. 186

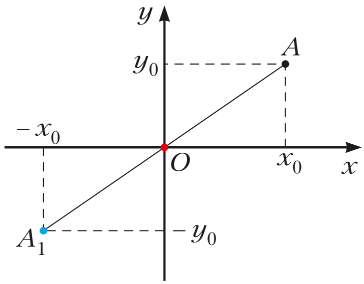
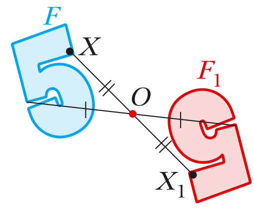


Рис. 187



симметрии. Также говорят, что фигуры F и F_1 **симметричны относительно точки** O.

Теорема 19.1
(свойство центральной симметрии)

Центральная симметрия является движением.

Доказательство

Выберем систему координат так, чтобы центр симметрии совпал с началом координат. Пусть A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ — произвольные точки фигуры F. Тогда точки A_1 $(-x_1; -y_1)$ и B_1 $(-x_2; -y_2)$ — соответственно их образы при центральной симметрии относительно начала координат.

Имеем:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = AB.$$

Мы получили, что $AB = A_1B_1$, т. е. центральная симметрия сохраняет расстояние между точками. Следовательно, центральная симметрия является движением. ◄

Следствие

Если фигуры F и F_1 симметричны относительно точки, то $F = F_1$.

Определение

Фигуру называют симметричной относительно точки O, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно точки O, также принадлежит этой фигуре.

Точку O называют **центром симметрии фигуры**. Также говорят, что **фигура имеет центр симметрии**.

Приведём примеры фигур, имеющих центр симметрии.

Центром симметрии отрезка является его середина (рис. 188).

Рис. 188

Точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии (рис. 189).

Существуют фигуры, имеющие бесконечно много центров симметрии. Например, каждая точка прямой является её центром симметрии.

Также бесконечно много центров симметрии имеет фигура, состоящая из двух параллельных прямых. Любая точка прямой, равноудалённой от двух данных, является центром симметрии рассматриваемой фигуры (рис. 190).

Рис. 189

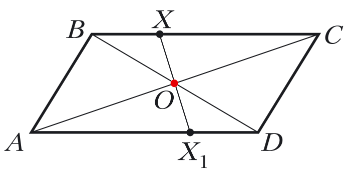
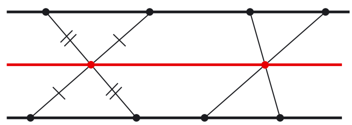


Рис. 190



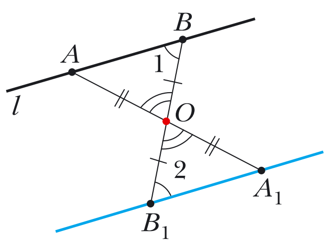
Задача 1. Докажите, что образом данной прямой l при симметрии относительно точки O, не принадлежащей прямой l, является прямая, параллельная данной.

Решение. Так как центральная симметрия — это движение, то образом прямой l будет прямая. Для построения прямой достаточно отметить две любые её точки.

Выберем на прямой l произвольные точки A и B (рис. 191). Пусть точки A_1 и B_1 — их образы при центральной симметрии относительно точки O. Тогда прямая A_1B_1 — образ прямой l.

Так как $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, углы AOB и A_1OB_1 равны как вертикальные, то треугольники AOB и A_1OB_1 равны по перво-

Рис. 191



му признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle 1 = \angle 2$ (см. рис. 191). Следовательно, по признаку параллельных прямых $l \parallel A_1B_1$. ◄

<u>Задача 2.</u> Точка M принадлежит углу ABC (рис. 192). На сторонах BA и BC угла постройте такие точки E и F, чтобы точка M была серединой отрезка EF.

Решение. Пусть прямая A_1B_1 — образ прямой AB при центральной симметрии относительно точки M (рис. 193). Обозначим F — точку пересечения прямых A_1B_1 и BC.

Рис. 192

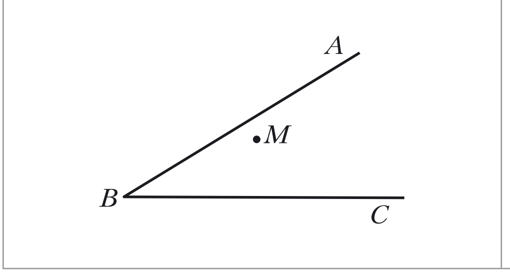
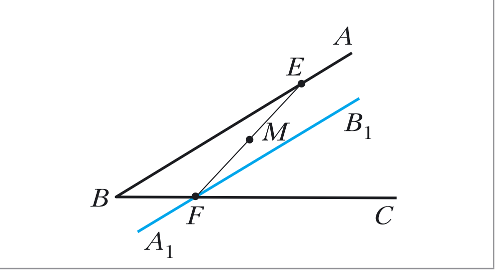


Рис. 193



Найдём прообраз точки F. Очевидно, что он лежит на прямой AB. Поэтому достаточно найти точку пересечения прямых FM и AB. Обозначим эту точку E. Тогда E и F — искомые точки. ◄

Изучая окружающий мир, мы часто встречаемся с симметрией. Примеры проявления симметрии в природе показаны на рисунке 194. Объекты, имеющие ось или центр симметрии, легко воспринимаются и радуют глаз. Недаром в Древней Греции слово «симметрия» служило синонимом слов «гармония», «красота».

Рис. 194

Идея симметрии широко используется в изобразительном искусстве, архитектуре и технике (рис. 195).

Рис. 195

На рисунке 196 изображены точки O, X, X_1 и X_2 такие, что $OX_1 = OX_2 = OX$, $\angle X_1OX = \angle X_2OX = \alpha$. Говорят, что точка X_1 является образом точки X при **повороте вокруг центра $\boldsymbol{O}$ против часовой стрелки на угол α**. Также говорят, что точка X_2 – это образ точки X при **повороте вокруг центра $\boldsymbol{O}$ по часовой стрелке на угол α**.

Точку O называют **центром поворота**, угол α – **углом поворота**.

Рассмотрим фигуру F, точку O и угол α. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол α (если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она сама). В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 197, *а*, *б*). Такое преобразование фигуры F называют **поворотом вокруг центра $\boldsymbol{O}$ против часовой стрелки на угол α**. Точку O называют **центром поворота**.

Рис. 196

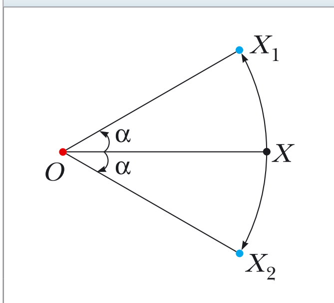
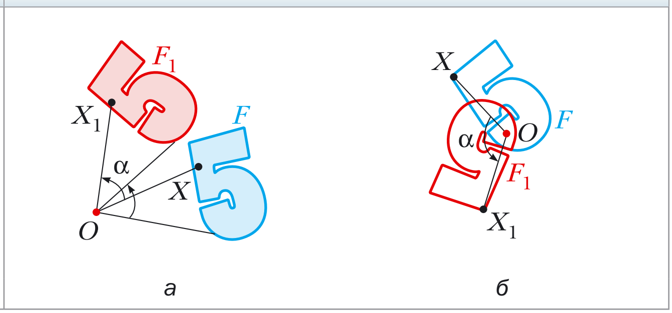


Рис. 197



Аналогично определяют преобразование поворота фигуры F по часовой стрелке на угол α (рис. 198).

Заметим, что центральная симметрия является поворотом вокруг центра симметрии на угол $180°$.

Теорема 19.2
(свойство поворота)

Поворот является движением.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Следствие

Если фигура F_1 — образ фигуры F при повороте, то $F = F_1$.

Задача 3. На рисунке 199 изображены прямая a и точка O. Постройте образ прямой a при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 45°.

Решение. Так как поворот — это движение, то образом прямой a будет прямая. Для построения прямой достаточно отметить две любые её точки. Выберем на прямой a произвольные точки A и B (см. рис. 199). Пусть точки A_1 и B_1 — их образы при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 45°. Тогда прямая A_1B_1 — образ прямой a. ◄

Задача 4. Точка P принадлежит углу ABC (рис. 200). Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого является точкой P, а две другие принадлежат сторонам BA и BC угла ABC.

Рис. 198

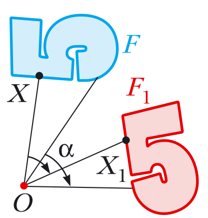


Рис. 199

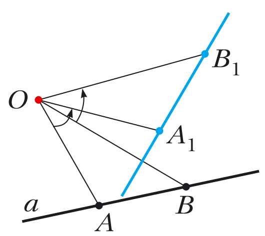
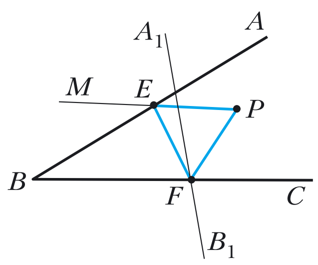


Рис. 200



Решение. Пусть прямая A_1B_1 — образ прямой AB при повороте вокруг центра P против часовой стрелки на угол 60°. Обозначим F — точку пересечения прямых A_1B_1 и BC.

Пусть точка E — прообраз точки F при рассматриваемом повороте. Точка E принадлежит стороне BA угла ABC.

Эти соображения подсказывают, как построить искомый треугольник.

Строим прямую A_1B_1 как образ прямой AB при повороте вокруг центра P против часовой стрелки на угол 60°. Пусть F — точка пересечения прямых A_1B_1 и BC.

Строим угол MPF, равный 60°. Пусть прямые MP и AB пересекаются в точке E. Эта точка и является прообразом точки F.

Имеем: $PF = PE$ и $\angle FPE = 60^\circ$. Следовательно, треугольник EPF — равносторонний. ◄

1. Какие точки называют симметричными относительно точки O? Как называют точку O?
2. Какие фигуры называют симметричными относительно точки O?
3. Сформулируйте свойство центральной симметрии.
4. Каким свойством обладают фигуры, симметричные относительно точки?
5. О какой фигуре говорят, что она имеет центр симметрии?
6. Приведите примеры фигур, имеющих центр симметрии.
7. Опишите преобразование поворота вокруг точки.
8. Сформулируйте свойство поворота.
9. Каким свойством обладают фигуры, если одна из них является образом другой при повороте?

Практические задания

694. Начертите треугольник ABC и отметьте точку O, не принадлежащую ему. Постройте треугольник, симметричный данному относительно точки O.

695. Начертите треугольник ABC. Постройте треугольник, симметричный данному относительно середины стороны AB.

696. Начертите окружность и отметьте на ней точку. Постройте окружность, симметричную данной относительно отмеченной точки.

697. Постройте образ отрезка AB при повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол 45° (рис. 201).

698. Постройте образ треугольника ABC при повороте вокруг центра O по часовой стрелке на угол 90° (рис. 202).

Рис. 201

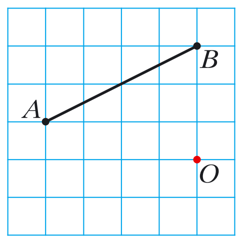
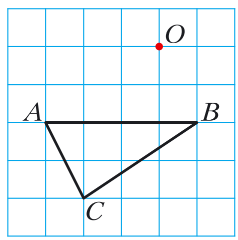


Рис. 202



699. Постройте параллелограмм $ABCD$ по его вершинам A и B и точке O — точке пересечения его диагоналей (рис. 203).

700. Даны две параллельные прямые a и b (рис. 204). Найдите точку, относительно которой прямая a будет симметрична прямой b.

701. На рисунке 205 изображены два равных отрезка AB и BC такие, что $\angle ABC = 60°$. Найдите точку O такую, что отрезок AB — это образ отрезка BC при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол $120°$.

702. На рисунке 206 изображены два равных отрезка MN и NK такие, что $\angle MNK = 90°$. Найдите точку O такую, что отрезок NK — это образ отрезка MN при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол $90°$.

Рис. 203

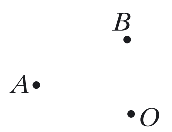


Рис. 204

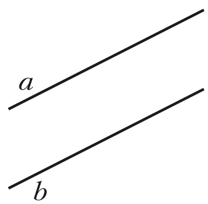


Рис. 205

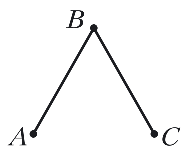
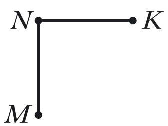


Рис. 206

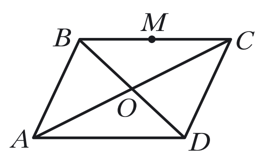


703. Постройте фигуру, не имеющую осей симметрии, образом которой является сама эта фигура при повороте вокруг некоторой точки: 1) на угол $90°$; 2) на угол $120°$.

Упражнения

704. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 207). Точка M — середина стороны BC. Укажите образы точек A, D и M, стороны CD, диагонали BD при симметрии относительно точки O.

Рис. 207



705. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

706. Докажите, что окружность имеет центр симметрии.

707. Точки A_1 и B_1 являются образами соответственно точек A и B при симметрии относительно точки, не принадлежащей прямой AB. Докажите, что четырёхугольник ABA_1B_1 — параллелограмм.

708. Найдите координаты точек, симметричных точкам A $(3; -1)$ и B $(0; -2)$ относительно: 1) начала координат; 2) точки M $(2; -3)$.

709. Докажите, что образом прямой, проходящей через центр симметрии, является сама эта прямая.

710. Точки A $(x; -2)$ и B $(1; y)$ симметричны относительно: 1) начала координат; 2) точки M $(-1; 3)$. Найдите x и y.

711. На рисунке 208 изображены фигуры, составленные из равных полукругов. Какие из этих фигур при некотором повороте на угол α, где $0° < \alpha \leqslant 180°$, вокруг точки O совпадают со своими образами?

Рис. 208

712. Медианы равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 209). Укажите образы точек C, C_1 и O, стороны BC, медианы BB_1, отрезка OC_1, треугольника $A_1B_1C_1$ при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 120°.

713. Точка O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 210). Укажите образы стороны AF, диагонали BF, диагонали AD, шестиугольника $ABCDEF$ при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол: 1) 60°; 2) 120°.

714. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 211). Укажите образы точек A, O и C, стороны AD, диагонали BD при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол 90°.

Рис. 209

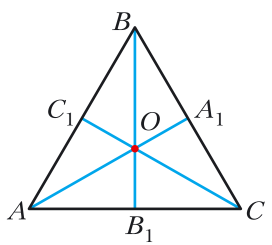


Рис. 210

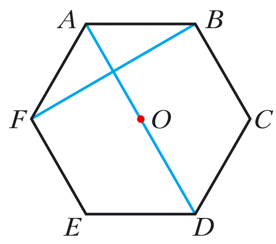
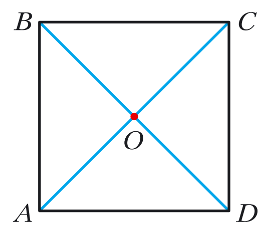


Рис. 211



715. Докажите, что треугольник не имеет центра симметрии.

716. Докажите, что луч не имеет центра симметрии.

717. Докажите, что если четырёхугольник имеет центр симметрии, то он является параллелограммом.

718. Окружности с центрами O_1 и O_2 симметричны относительно точки O (рис. 212). Прямая, проходящая через центр симметрии, пересекает первую окружность в точках A_1 и B_1, а вторую – в точках A_2 и B_2. Докажите, что $A_1B_1 = A_2B_2$.

719. Пусть вершина A равностороннего треугольника ABC является центром поворота на угол $120°$. Найдите отрезок BC_1, где точка C_1 – образ точки C при данном повороте, если $AB = 1$ см. Сколько решений имеет задача?

720. Пусть вершина A квадрата $ABCD$ является центром поворота против часовой стрелки на угол $90°$. Найдите отрезок CC_1, где точка C_1 – образ точки C при данном повороте, если $AB = 1$ см.

721. Вершины одного параллелограмма лежат на сторонах другого: по одной вершине на каждой стороне. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих параллелограммов совпадают.

722. Точки A и C принадлежат острому углу, но не лежат на его сторонах. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы точки B и D лежали на сторонах угла.

723. Постройте отрезок, серединой которого является данная точка, а концы принадлежат данным непараллельным прямым.

724. Точка M принадлежит углу ABC и не принадлежит его сторонам. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, вершиной прямого угла которого является точка M, а две другие вершины принадлежат сторонам BA и BC соответственно.

725. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отметили точку D. Вне треугольника ABC выбрали точку E такую, что треугольник DEC – равносторонний (рис. 213). Докажите, что точка C и середины отрезков BE и AD являются вершинами равностороннего треугольника.

Рис. 212

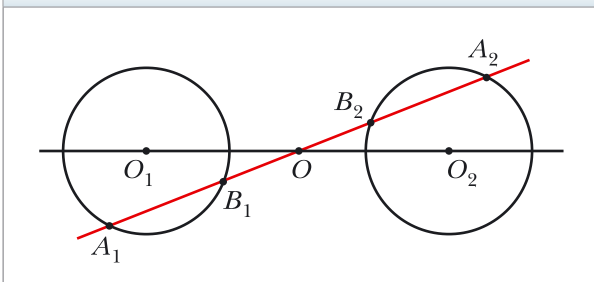
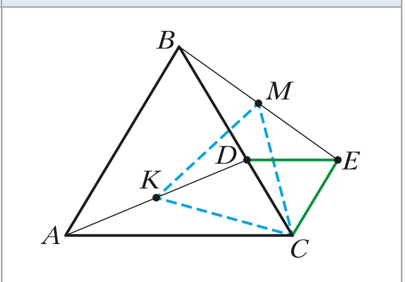


Рис. 213



726. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы его вершины принадлежали трём данным параллельным прямым.

727. Постройте ромб, точкой пересечения диагоналей которого является данная точка, а три вершины принадлежат трём данным попарно непараллельным прямым.

728. На стороне CD квадрата $ABCD$ отметили точку E. Биссектриса угла BAE пересекает сторону BC в точке F. Докажите, что $AE = BF + ED$.

729. В равностороннем треугольнике ABC выбрали точку P так, что $\angle APB = 150°$. Докажите, что существует прямоугольный треугольник, стороны которого равны отрезкам PA, PB и PC.

Упражнения для повторения

730. Найдите стороны треугольника ABC, если $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, а высота, проведённая из вершины C, равна 4 см.

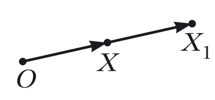
731. На оси абсцисс найдите точку, равноудалённую от точек A $(-2;\ 4)$ и B $(6;\ 8)$.

732. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону треугольника в отношении 25 : 12, считая от вершины равнобедренного треугольника. Найдите радиус вписанной окружности, если площадь треугольника равна 1680 см^2.

§ 20. Гомотетия. Подобие фигур

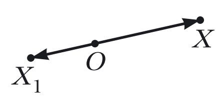
На рисунке 214 изображены точки O, X и X_1 такие, что $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$. Говорят, что точка X_1 — это образ точки X при **гомотетии с центром** O и **коэффициентом** 2.

Рис. 214



На рисунке 215 изображены точки O, X и X_1 такие, что $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$. Говорят, что точка X_1 — это образ точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом $-\frac{1}{2}$.

Рис. 215

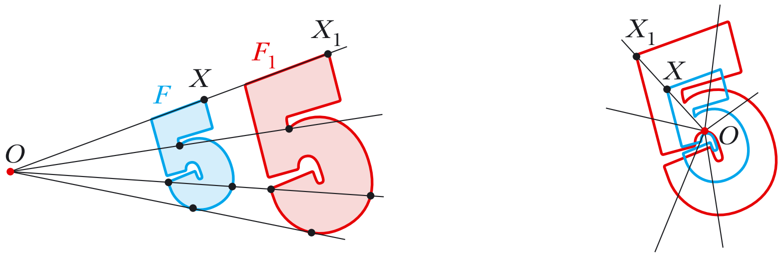


Вообще, если точки O, X и X_1 таковы, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k \neq 0$, то говорят, что точка X_1 — это образ точки X при **гомотетии с центром O и коэффициентом k**.

Точку O называют **центром гомотетии**, число k — **коэффициентом гомотетии**, $k \neq 0$.

Рассмотрим фигуру F и точку O. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k (если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она сама). В результате этого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 216, *а*, *б*). Такое преобразование фигуры F называют **гомотетией с центром *O* и коэффициентом *k***. Также говорят, что фигура F_1 **гомотетична** фигуре F с центром O и коэффициентом k.

Рис. 216



а *б*

Например, на рисунке 217 треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC с центром O и коэффициентом, равным -3. Также можно сказать, что треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с тем же центром, но коэффициентом, равным $-\frac{1}{3}$.

Отметим, что при $k = -1$ гомотетия является центральной симметрией относительно центра O (рис. 218). Если $k = 1$, то гомотетия является тождественным преобразованием.

Рис. 217

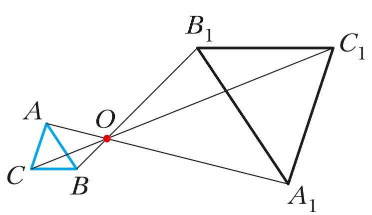
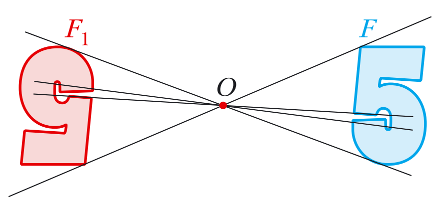


Рис. 218



Очевидно, что при $k \neq 1$ и $k \neq -1$ гомотетия не является движением.

Теорема 20.1

При гомотетии фигуры F с коэффициентом k все расстояния между её точками изменяются в $|k|$ раз, т. е. если A и B — произвольные точки фигуры F, а A_1 и B_1 — их соответствующие образы при гомотетии с коэффициентом k, то $A_1B_1 = |k|AB$.

Доказательство

Пусть точка O — центр гомотетии. Тогда $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$. Имеем: $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}$, т. е. $A_1B_1 = |k|AB$. ◄

Следствие

Если треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии k, то $\Delta A_1B_1C_1 \overset{k}{\backsim} \Delta ABC$.

Для доказательства этой теоремы достаточно воспользоваться теоремой 20.1 и третьим признаком подобия треугольников.

Гомотетия обладает целым рядом других свойств.

При гомотетии:

— *образом прямой является прямая;*

— *образом отрезка является отрезок;*

— *образом угла является угол, равный данному;*

— *образом треугольника является треугольник, подобный данному;*

— *образом окружности является окружность;*

— *площадь многоугольника изменяется в k^2 раз, где k — коэффициент гомотетии.*

Доказательство этих свойств выходит за рамки рассматриваемого курса геометрии.

Перечисленные свойства гомотетии указывают на то, что это преобразование может изменить размеры фигуры, но не меняет её форму, т. е. при гомотетии образ и прообраз являются подобными фигурами. Заметим, что в курсе геометрии 8 класса, говоря о подобии фигур, мы давали определение только подобных треугольников. Сейчас определим понятие «подобие фигур», не ограничиваясь треугольниками.

На рисунке 219 фигура F_1 гомотетична фигуре F, а фигура F_2 симметрична фигуре F_1 относительно прямой l.

Говорят, что фигура F_2 получена из фигуры F в результате **композиции** двух преобразований: гомотетии и осевой симметрии.

Поскольку $F_1 = F_2$, то у фигур F и F_2 одинаковые формы, но разные размеры, т. е. они подобны. Говорят, что фигура F_2 получена из фигуры F в результате **преобразования подобия**.

На рисунке 220 фигура F_1 гомотетична фигуре F, а фигура F_2 – образ фигуры F_1 при некотором движении. Рассуждая аналогично, можно утверждать, что фигуры F и F_2 подобны.

Рис. 219

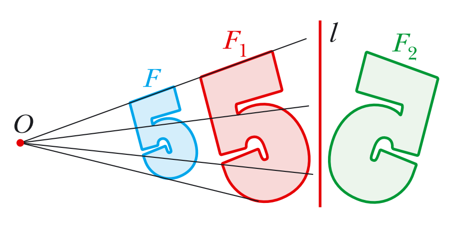
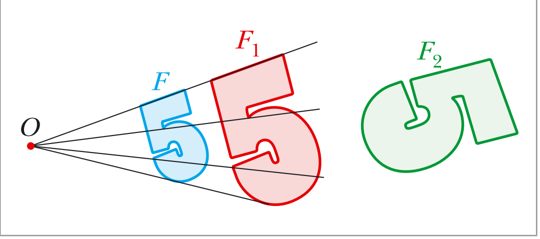


Рис. 220



Из сказанного следует, что целесообразно принять такое определение.

Определение

Две фигуры называют подобными, если одну из них можно получить из другой в результате композиции двух преобразований: гомотетии и движения.

Это определение иллюстрирует схема, изображённая на рисунке 221.

Рис. 221

Подобие = Гомотетия + Движение

Запись $F \sim F_1$ означает, что фигуры F и F_1 подобны. Также говорят, что фигура F_1 – образ фигуры F при **преобразовании подобия**.

Из приведённого определения следует, что *при преобразовании подобия фигуры F расстояния между её точками изменяются в одно и то же количество раз.*

Так как тождественное преобразование является движением, то из схемы, изображённой на рисунке 221, следует, что гомотетия – частный случай преобразования подобия.

Пусть A и B – произвольные точки фигуры F, а точки A_1 и B_1 – их образы при преобразовании подобия. Точки A_1 и B_1 принадлежат фигуре F_1, которая подобна фигуре F. Число $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ называют **коэффициентом подобия**. Говорят, что фигура F_1 подобна фигуре F с коэффициентом подобия k, а фигура F подобна фигуре F_1 с коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$.

Заметим, что преобразование подобия с коэффициентом $k = 1$ является движением. Отсюда следует, что движение — частный случай преобразования подобия.

С преобразованием подобия мы часто встречаемся в повседневной жизни. Например, в результате изменения масштаба карты получается карта, подобная данной. Перенося в свою тетрадь рисунок, сделанный учителем на доске, вы также выполняете преобразование подобия.

Теорема 20.2

Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

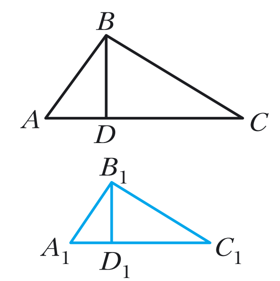
Доказательство этой теоремы выходит за рамки рассматриваемого курса геометрии.

Мы докажем эту теорему для частного случая, рассмотрев подобные треугольники.

Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ — образ треугольника ABC при преобразовании подобия с коэффициентом k (рис. 222). Сторона A_1C_1 — образ стороны AC. Тогда $A_1C_1 = k \cdot AC$. Проведём высоту BD. Пусть точка D_1 — образ точки D. Поскольку при преобразовании подобия сохраняются углы, то отрезок B_1D_1 — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда $B_1D_1 = k \cdot BD$. Имеем:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BD} = \frac{kAC \cdot kBD}{AC \cdot BD} = k^2.$$

Рис. 222



Задача 1. Докажите, что образом прямой l при гомотетии с центром O, не принадлежащим прямой l, является прямая, параллельная данной.

Решение. Из свойств гомотетии следует, что образом прямой l будет прямая. Для построения прямой достаточно знать две любые её точки. Выберем на прямой l произвольные точки A и B (рис. 223). Пусть точки A_1 и B_1 — их образы при гомотетии с центром O и коэффициентом k (рисунок 223 соответствует случаю, когда $k > 1$). Тогда прямая A_1B_1 – образ прямой AB.

При доказательстве теоремы 20.1 мы показали, что $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$. Следовательно, $AB \parallel A_1B_1$. ◄

Задача 2. В остроугольный треугольник ABC впишите квадрат так, чтобы две его вершины лежали соответственно на сторонах AB и BC, а две другие – на стороне AC.

Решение. Из произвольной точки M стороны AB опустим перпендикуляр MQ на сторону AC (рис. 224). Построим квадрат $MQPN$ так, чтобы точка P лежала на луче AC. Пусть луч AN пересекает сторону BC в точке N_1.

Рассмотрим гомотетию с центром A и коэффициентом $k = \dfrac{AN_1}{AN}$. Тогда точка N_1 – образ точки N при этой гомотетии. Образом отрезка MN будет отрезок M_1N_1, где точка M_1 принадлежит лучу AB, причём $M_1N_1 \parallel MN$.

Аналогично отрезок N_1P_1 такой, что точка P_1 принадлежит лучу AC и $N_1P_1 \parallel NP$, будет образом отрезка NP. Следовательно, отрезки M_1N_1 и N_1P_1 – соседние стороны искомого квадрата. Для завершения построения осталось опустить перпендикуляр M_1Q_1 на сторону AC. ◄

Задача 3. Пусть CD – высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Найдите радиус r вписанной окружности треугольника ABC, если радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, соответственно равны r_1 и r_2.

Решение. Так как угол A – общий для прямоугольных треугольников ACD и ABC, то эти треугольники подобны (рис. 225). Пусть коэффициент подобия равен k_1. Очевидно, что $k_1 = \dfrac{r_1}{r}$. Аналогично $\Delta BCD \sim \Delta ABC$ с коэффициентом $k_2 = \dfrac{r_2}{r}$.

Рис. 223

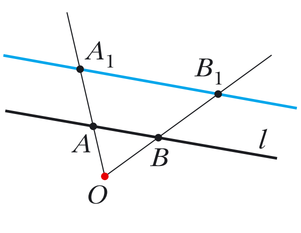


Рис. 224

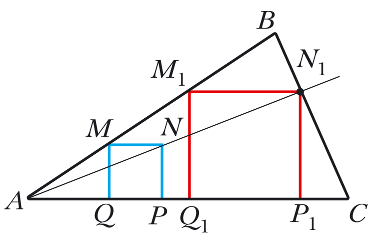
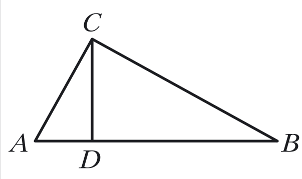


Рис. 225



Обозначим площади треугольников ACD, BCD и ABC соответственно S_1, S_2 и S. Имеем:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2}; \ \frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

Отсюда $\dfrac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \dfrac{S_1 + S_2}{S} = 1.$

Получаем, что $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, т. е. $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Ответ: $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. ◄

1. В каком случае говорят, что точка X_1 является образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k?

2. Опишите преобразование фигуры F, которое называют гомотетией с центром O и коэффициентом k.

3. Как изменяется расстояние между точками при гомотетии с коэффициентом k?

4. Сформулируйте свойства гомотетии.

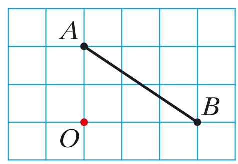
5. Какие фигуры называют подобными?

6. Чему равно отношение площадей подобных многоугольников?

Практические задания

733. Постройте образ отрезка AB (рис. 226) при гомотетии с центром O и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = -\dfrac{1}{2}$.

Рис. 226



734. Начертите отрезок AB. Постройте образ этого отрезка при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в точке A, $k = 3$;
2) в точке B, $k = -2$;
3) в середине отрезка AB, $k = 2$.

735. Начертите окружность, радиус которой равен 2 см, и отметьте на ней точку A. Постройте образ этой окружности при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в центре окружности, $k = -\dfrac{1}{2}$, $k = 2$;

2) в точке A, $k = 2$, $k = -\dfrac{1}{2}$.

736. Начертите треугольник ABC. Постройте образ этого треугольника при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в точке B, $k = 3$;

2) в точке C, $k = -\frac{1}{2}$;

3) в точке A, $k = \frac{1}{2}$;

4) в середине стороны AB, $k = \frac{1}{2}$;

5) в середине стороны AC, $k = -\frac{1}{3}$.

737. Начертите треугольник ABC. Найдите точку пересечения его медиан. Постройте образ этого треугольника при гомотетии с центром в точке пересечения его медиан и коэффициентом:

1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$.

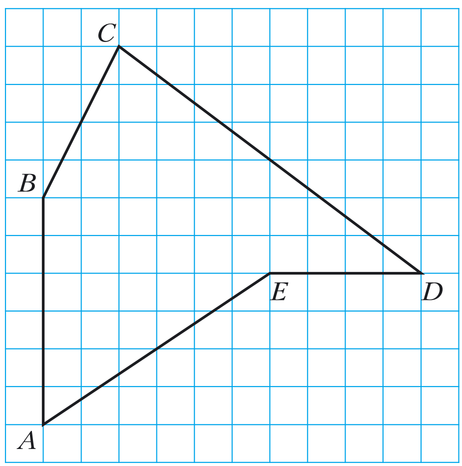
738. Начертите параллелограмм $ABCD$. Точку пересечения его диагоналей обозначьте O. Постройте образ этого параллелограмма при гомотетии с центром O и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

739. Начертите квадрат $ABCD$. Постройте образ этого квадрата при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в точке A, $k = \frac{1}{3}$; 2) в точке B, $k = -2$; 3) в точке C, $k = 2$.

740. Ориентируясь по клеткам, начертите пятиугольник $ABCDE$ (рис. 227). Постройте пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подобный данному с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

Рис. 227



741. На рисунке 228 точка A_1 — образ точки A при гомотетии с центром O. Постройте образ точки B при этой гомотетии.

742. На рисунке 229 точка A_1 — образ точки A при гомотетии с коэффициентом: 1) $k = 3$; 2) $k = -2$. Постройте центр гомотетии.

Рис. 228

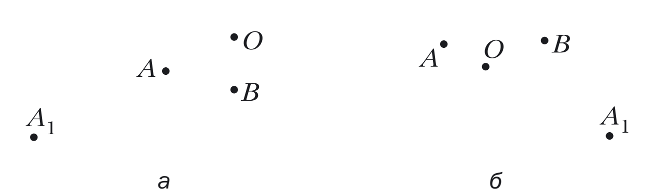
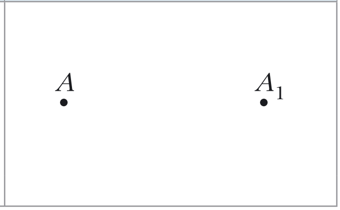


Рис. 229



743. На рисунке 230 изображены прямоугольник $ABCD$ и точки A_1 и D_1, которые являются образами соответственно точек A и D при преобразовании подобия. Постройте образ прямоугольника $ABCD$ при этом преобразовании. Сколько решений имеет задача?

744. На рисунке 231 изображены прямоугольник $ABCD$ и точки A_1 и C_1, являющиеся образами соответственно точек A и C при преобразовании подобия. Постройте образ прямоугольника $ABCD$ при этом преобразовании. Сколько решений имеет задача?

Рис. 230

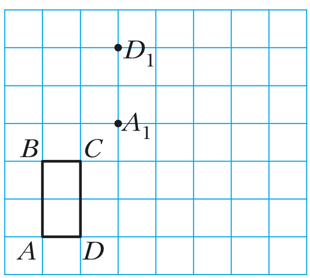
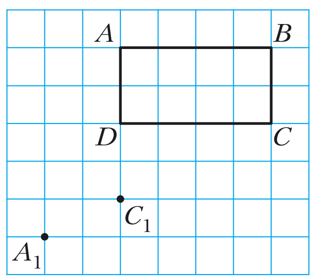


Рис. 231



745. Постройте образ треугольника ABC при преобразовании подобия, которое является композицией двух преобразований: гомотетии с центром O и коэффициентом $k = 2$ и осевой симметрии относительно прямой l (рис. 232). Укажите коэффициент подобия.

746. Начертите окружность, радиус которой равен 2 см. Отметьте точку O на расстоянии 4 см от её центра. Постройте образ этой окружности при преобразовании подобия, которое является композицией двух преобразований: гомотетии с центром O и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$ и поворота с центром O по часовой стрелке на угол 45°. Укажите коэффициент подобия.

747. На рисунке 233 изображены две параллельные прямые a и b. Постройте центр гомотетии, при которой прямая b является образом прямой a с коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$. Сколько решений имеет задача?

Рис. 232

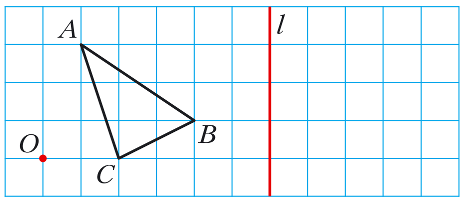
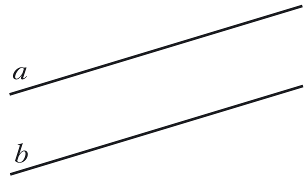


Рис. 233



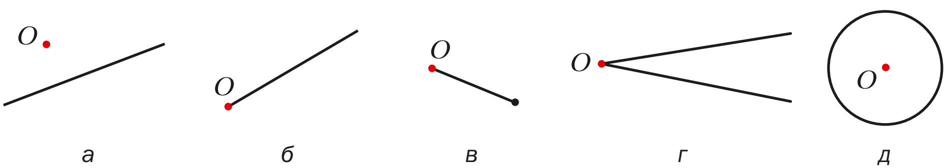
748. Начертите трапецию $ABCD$, основание BC которой в два раза меньше основания AD. Постройте центр гомотетии, при которой отрезок AD является образом отрезка BC с коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

Упражнения

749. В параллелограмме $ABCD$ точка D_1 – середина стороны AD. При гомотетии с центром A точка D_1 является образом точки D. Найдите коэффициент гомотетии. Укажите, какие точки являются образами точек B и C при этой гомотетии.

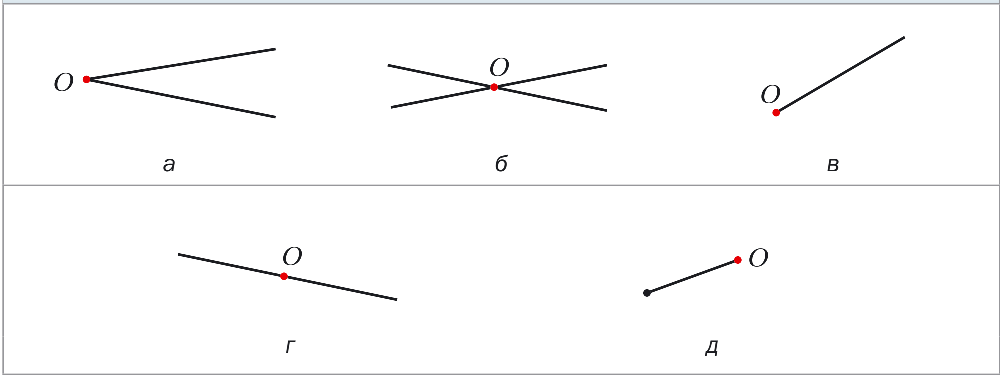
750. Какие из фигур, изображённых на рисунке 234, совпадают со своими образами при гомотетии с центром O и коэффициентом $k > 0$ и $k \neq 1$?

Рис. 234



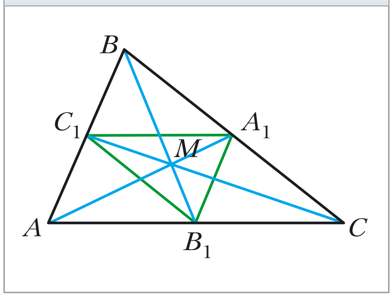
751. Какие из фигур, изображённых на рисунке 235, совпадают со своими образами при гомотетии с центром O и коэффициентом $k < 0$?

Рис. 235



752. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M (рис. 236). Найдите коэффициент гомотетии с центром: 1) в точке B, при которой точка B_1 является образом точки M; 2) в точке M, при которой точка A_1 является образом точки A; 3) в точке C, при которой точка M является образом точки C_1.

Рис. 236



753. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M (см. рис. 236). Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой треугольник $A_1B_1C_1$ является образом треугольника ABC.

754. В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Точки K, F и N – середины отрезков AM, BM и CM соответственно. Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой треугольник ABC является образом треугольника KFN.

755. Найдите образы точек $A\ (-2; 1)$, $B\ (3; 0)$, $D\ (0; -6)$ при гомотетии с центром $O\ (0; 0)$ и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\frac{1}{2}$; 4) $k = -\frac{1}{3}$.

756. Точка $A_1\ (-1; 2)$ – образ точки $A\ (-3; 6)$ при гомотетии с центром в начале координат. Найдите коэффициент гомотетии.

757. Площади двух подобных треугольников равны 28 см^2 и 63 см^2. Одна из сторон первого треугольника равна 8 см. Найдите сторону второго треугольника, соответствующую данной стороне первого.

758. Соответствующие стороны двух подобных треугольников равны 30 см и 24 см. Площадь треугольника со стороной 30 см равна 45 см^2. Найдите площадь другого треугольника.

759. Площадь треугольника равна S. Чему равна площадь треугольника, который отсекает от данного его средняя линия?

760. Площадь треугольника равна S. Найдите площадь треугольника, вершины которого — середины средних линий данного треугольника.

761. Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 237). Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой: 1) отрезок AC является образом отрезка MN; 2) отрезок MN является образом отрезка AC.

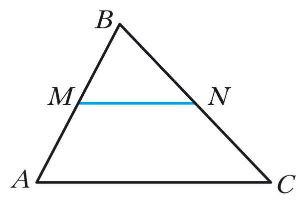


Рис. 237

762. Параллельные прямые пересекают стороны угла A в точках M, N, P и Q (рис. 238). Известно, что $AM : MP = 3 : 1$. Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой: 1) отрезок PQ является образом отрезка MN; 2) отрезок MN является образом отрезка PQ.

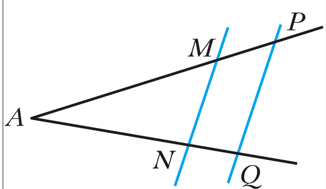


Рис. 238

763. Параллельные отрезки BC и AD таковы, что $AD = 3BC$. Сколько существует точек, являющихся центрами гомотетии, при которой образом отрезка BC является отрезок AD? Для каждой такой точки определите коэффициент гомотетии.

764. Окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно с радиусами R и r касаются внешним образом в точке O (рис. 239). Докажите, что окружность с центром O_1 является образом окружности с центром O_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом $-\frac{R}{r}$.

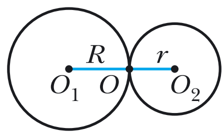


Рис. 239

765. Окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно с радиусами R и r касаются внутренним образом в точке O (рис. 240). Докажите, что окружность с центром O_1 является образом окружности с центром O_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{R}{r}$.

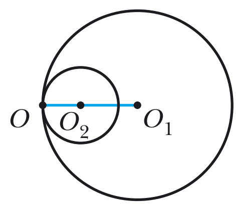
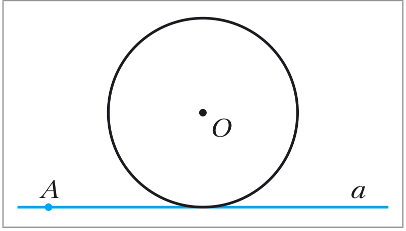


Рис. 240

766. Окружность с центром O касается прямой a. Докажите, что образ этой окружности при гомотетии с центром A, где A — произвольная точка прямой a (рис. 241), касается этой прямой.

Рис. 241



767. Точка A (2; –3) — образ точки B (8; 6) при гомотетии с центром M (4; 0). Найдите коэффициент гомотетии.

768. Точка A (–7; 10) — образ точки B (–1; –2) при гомотетии с коэффициентом –2. Найдите центр гомотетии.

769. Точка A_1 (x; 4) — образ точки A (–6; y) при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом: 1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$. Найдите x и y.

770. Точка A_1 (4; y) — образ точки A (x; –4) при гомотетии с центром B (1; –1) и коэффициентом $k = -3$. Найдите x и y.

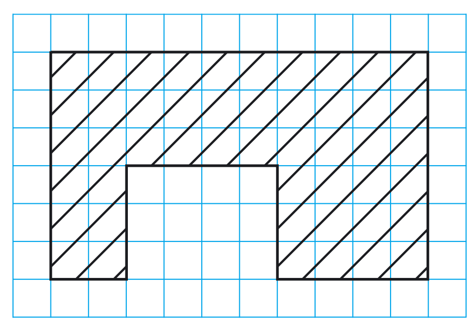
771. Средняя линия треугольника отсекает от него трапецию, площадь которой равна 21 см^2. Найдите площадь данного треугольника.

772. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его сторону AB в точке M, а сторону BC — в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $BM = 4$ см, $AC = 8$ см, $AM = MK$, а площадь треугольника MBK равна 5 см^2.

773. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если $BC : AD = 3 : 5$, а площадь треугольника AED равна 175 см^2.

774. На рисунке 242 изображён план школы. Вычислите, какую площадь занимает школа, если план начерчен в масштабе 1 : 2000. Длина стороны клетки равна 0,5 см.

Рис. 242



775. Найдите образ прямой $y = 2x + 1$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

776. Найдите образ окружности $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом: 1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

777. Две окружности касаются внутренним образом. Через точку касания проведены две прямые, пересекающие окружности в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 243). Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

778. Две окружности касаются внешним образом. Через точку касания проведены две прямые, пересекающие окружности в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 244). Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

779. Точка A принадлежит окружности (рис. 245). Найдите геометрическое место точек, являющихся серединами хорд данной окружности, одним из концов которых является точка A.

Рис. 243

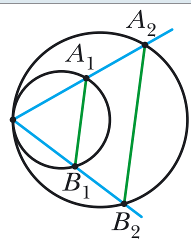


Рис. 244

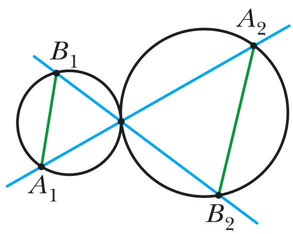
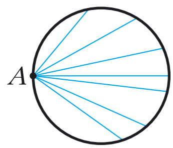


Рис. 245



780. Две окружности касаются внутренним образом, причём меньшая окружность проходит через центр большей. Докажите, что любую хорду большей окружности, проходящую через точку касания, меньшая окружность делит пополам.

781. Даны треугольник ABC и произвольная точка M. Докажите, что точки, симметричные точке M относительно середин сторон треугольника ABC, являются вершинами треугольника, равного данному.

782. Постройте треугольник по двум его углам и радиусу описанной окружности.

783. Постройте треугольник по двум его углам и радиусу вписанной окружности.

784. Впишите в данный треугольник ABC прямоугольник, стороны которого относятся как $2 : 1$, так, чтобы две вершины большей стороны прямоугольника лежали на стороне AC треугольника, а две другие вершины — на сторонах AB и BC.

785. Отрезок AB — хорда данной окружности, точка C — произвольная точка этой окружности. Найдите геометрическое место точек, являющихся точками пересечения медиан треугольников ABC.

786. Даны две точки A и B и прямая l. Найдите геометрическое место точек, являющихся точками пересечения медиан треугольников ABC, где C — произвольная точка прямой l.

787. Точка M принадлежит углу ABC, но не принадлежит его сторонам. Постройте окружность, которая касается сторон угла и проходит через точку M.

Упражнения для повторения

788. Найдите площадь ромба и радиус окружности, вписанной в ромб, если его диагонали равны 12 см и 16 см.

789. Найдите периметр треугольника, образованного при пересечении прямой $3x + 4y = 24$ с осями координат.

790. Две окружности касаются внешним образом в точке A, точки B и C – точки касания с этими окружностями их общей касательной. Докажите, что $\angle BAC$ – прямой.

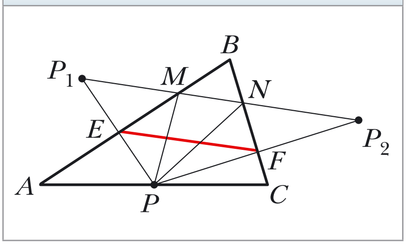
Когда сделаны уроки

Применение преобразований фигур при решении задач

Задача 1. На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC постройте такие точки M, N и P соответственно, чтобы периметр треугольника MNP был наименьшим.

Решение. Пусть P – произвольная точка стороны AC треугольника ABC, P_1 и P_2 – её образы при симметрии относительно прямых AB и BC соответственно (рис. 246). Прямая P_1P_2 пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и N. В задаче 2 § 18 мы показали, что при фиксированном положении точки P периметр треугольника MNP является наименьшим. Этот периметр равен длине отрезка P_1P_2.

Рис. 246



Заметим, что EF – средняя линия треугольника PP_1P_2. Тогда $EF = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Поскольку $\angle BEP + \angle BFP = 180°$, то точки P, E, B и F лежат на одной окружности с диаметром BP. Отсюда $EF = BP \cdot \sin B$. Следовательно, длина отрезка EF будет наименьшей при наименьшей длине отрезка BP, т. е. тогда, когда BP – высота треугольника ABC.

На рисунке 247 отрезок BP – высота треугольника ABC. Строим треугольник MNP наименьшего периметра при фиксированном положении точки P.

Из построения следует, что периметр любого другого треугольника, вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC, больше периметра треугольника MNP. Поэтому точки M, N, P являются искомыми. Эти же точки можно получить, проведя высоты из вершин A и C.

Следовательно, искомые точки — это основания высот данного треугольника ABC. ◂

Задача 2. Пусть точка O — центр правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$ (рис. 248). Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

Решение. Пусть $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{a}$. Рассмотрим поворот с центром O на угол $\frac{360°}{n}$, например, против часовой стрелки. При таком преобразовании образом данного n-угольника будет этот же n-угольник. Следовательно, искомая сумма не изменится. А это возможно лишь тогда, когда $\vec{a} = \vec{0}$. ◂

Задача 3. Внутри треугольника ABC, каждый из углов которого меньше 120°, найдите такую точку T, чтобы сумма $TA + TB + TC$ была наименьшей.

Решение. Пусть T — произвольная точка данного треугольника ABC (рис. 249). Рассмотрим поворот с центром A на угол 60° по часовой стрелке. Пусть точки T_1 и C_1 — образы точек T и C соответственно (см. рис. 249). Так как поворот является движением, то $T_1C_1 = TC$. Очевидно, что треугольник ATT_1 является равносторонним. Тогда $AT = TT_1$.

Рис. 247

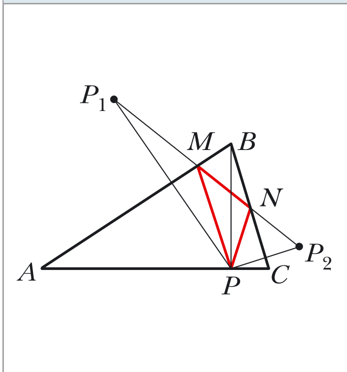


Рис. 248

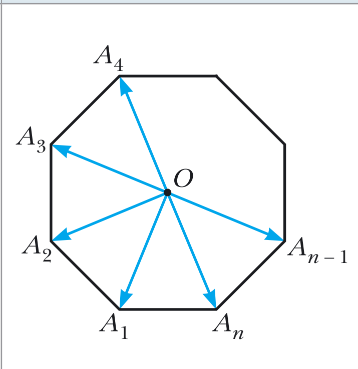
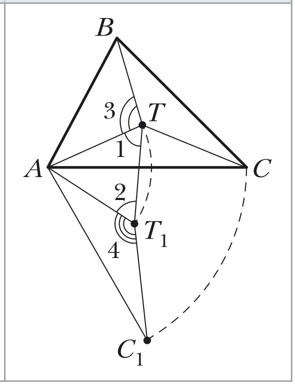


Рис. 249



Имеем: $TA + TB + TC = TT_1 + TB + T_1C_1$.

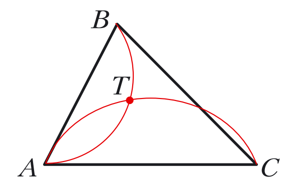
Понятно, что сумма $TT_1 + TB + T_1C_1$ будет наименьшей, если точки B, T, T_1 и C_1 лежат на одной прямой. Поскольку $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, то это условие будет выполнено тогда, когда $\angle 3 = \angle 4 = 120°$.

Так как угол AT_1C_1 — образ угла ATC при указанном повороте, то должно выполняться равенство $\angle ATC = 120°$.

Итак, точки B, T, T_1 и C_1 будут принадлежать одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle ATB = \angle ATC = 120°$. Отсюда $\angle BTC = 120°$.

Таким образом, сумма $TA + TB + TC$ будет наименьшей, если $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120°$.

Рис. 250



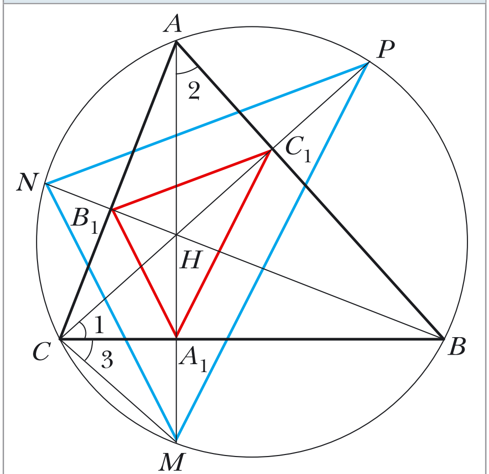
Найти точку T можно, например, построив ГМТ, из которых отрезки AB и AC видны под углами $120°$ (рис. 250).

Понятно, что если один из углов треугольника ABC не меньше $120°$, то точка пересечения построенных дуг не будет расположена внутри треугольника. Можно показать, что в треугольнике с углом, не меньшим $120°$, точка T, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является наименьшей, совпадает с вершиной тупого угла. ◀

<u>Задача 4.</u> Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ABC в два раза больше радиуса описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекают окружность, описанную около треугольника ABC, соответственно в точках M, N и P (рис. 251). Докажем, что $HA_1 = A_1M$, где точка H — ортоцентр треугольника ABC.

Рис. 251



Имеем: $\angle 1 = \angle 2 = 90° - \angle ABC$.

Углы 2 и 3 равны как вписанные углы, опирающиеся на дугу MB. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

Тогда в треугольнике HCM отрезок CA_1 является биссектрисой и высотой, а следовательно, и медианой. Отсюда $HA_1 = A_1M$.

Аналогично доказывают, что $HB_1 = B_1N$, $HC_1 = C_1P$.

Теперь понятно, что треугольник MNP гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с центром H и коэффициентом 2. Тогда радиус описанной окружности треугольника MNP в два раза больше радиуса описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Осталось заметить, что треугольники MNP и ABC вписаны в одну окружность. ◀

Задание № 5 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Какой из отрезков, изображённых на рисунке 252, может быть образом отрезка AB при движении?
А) MN Б) PQ В) EF Г) DC

2. Укажите уравнение образа прямой $y = 2x$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (0; 1).
А) $y = 2x + 1$ В) $y = x + 1$
Б) $y = 2x - 1$ Г) $y = x - 1$

3. Какая из прямых, изображённых на рисунке 253, может быть образом прямой a при параллельном переносе?
А) b Б) c В) d Г) a

Рис. 252

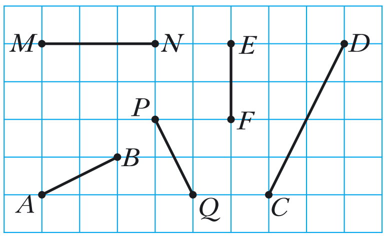
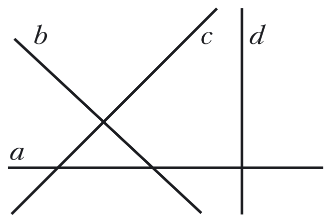


Рис. 253



4. Какая из указанных фигур имеет только одну ось симметрии?
А) квадрат В) парабола
Б) окружность Г) отрезок

5. При каких значениях x и y точки A $(-1; y)$ и B $(x; 6)$ симметричны относительно оси абсцисс?
А) $x = -1$, $y = 6$ В) $x = -1$, $y = -6$
Б) $x = 1$, $y = -6$ Г) $x = 1$, $y = 6$

6. Какая из указанных фигур имеет центр симметрии?
А) треугольник В) трапеция
Б) отрезок Г) угол

7. Какая из указанных фигур имеет центр симметрии и ось симметрии?
А) равносторонний треугольник
Б) параллелограмм
В) равнобокая трапеция
Г) прямая

8. При каких значениях x и y точки A $(x; 7)$ и B $(-4; y)$ симметричны относительно начала координат?

А) $x = 4$, $y = -7$ В) $x = -4$, $y = 7$

Б) $x = 4$, $y = 7$ Г) $x = -4$, $y = -7$

9. Точка O – центр правильного восьмиугольника $ABCDEFKM$ (рис. 254). Укажите образ стороны EF при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол 135°.

А) AB В) AM

Б) BC Г) CD

10. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ (рис. 255) пересекаются в точке M. Укажите коэффициент гомотетии с центром в точке M, при которой отрезок BC является образом отрезка AD, если $AB : BM = 7 : 2$.

А) $\frac{2}{7}$ Б) $\frac{7}{2}$ В) $\frac{2}{9}$ Г) $\frac{9}{2}$

Рис. 254

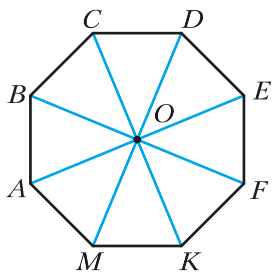
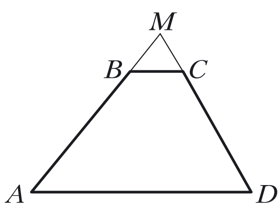


Рис. 255



11. Точка M $(6; -3)$ – образ точки N $(2; 1)$ при гомотетии с коэффициентом $-\frac{1}{3}$. Укажите координаты центра гомотетии.

А) $(5; -2)$ В) $(-5; 2)$

Б) $(8; -1)$ Г) $(-8; 1)$

12. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке E, а сторону BC – в точке F. Чему равна площадь треугольника CEF, если $AE : EC = 3 : 2$, а площадь треугольника ABC равна 75 см^2?

А) 36 см^2 В) 30 см^2

Б) 50 см^2 Г) 12 см^2

Итоги главы 5

Движение (перемещение)

Преобразование фигуры F, сохраняющее расстояние между точками, называют движением (перемещением) фигуры F.

Равные фигуры

Две фигуры называют равными, если существует движение, при котором одна из данных фигур является образом другой.

Параллельный перенос

Если точки X и X_1 таковы, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$, то говорят, что точка X_1 — это образ точки X при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$.

Свойства параллельного переноса

- Параллельный перенос является движением.
- Если фигура F_1 — образ фигуры F при параллельном переносе, то $F_1 = F$.

Осевая симметрия

Точки A и A_1 называют симметричными относительно прямой l, если прямая l является серединным перпендикуляром отрезка AA_1.

Свойства осевой симметрии

- Осевая симметрия является движением.
- Если фигуры F и F_1 симметричны относительно прямой, то $F = F_1$.

Фигура, имеющая ось симметрии

Фигуру называют симметричной относительно прямой l, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно прямой l, также принадлежит этой фигуре. Прямую l называют осью симметрии фигуры.

Центральная симметрия

Точки A и A_1 называют симметричными относительно точки O, если точка O является серединой отрезка AA_1.

Свойства центральной симметрии

- Центральная симметрия является движением.
- Если фигуры F и F_1 симметричны относительно точки, то $F = F_1$.

Фигура, имеющая центр симметрии

Фигуру называют симметричной относительно точки O, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно точки O, также принадлежит этой фигуре. Точку O называют центром симметрии фигуры.

Свойства поворота

- Поворот является движением.
- Если фигура F_1 — образ фигуры F при повороте, то $F_1 = F$.

Гомотетия

Если точки O, X и X_1 таковы, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k \neq 0$, то говорят, что точка X_1 — это образ точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k.

Свойство гомотетии

При гомотетии фигуры F с коэффициентом k все расстояния между её точками изменяются в $|k|$ раз, т. е. если A и B — произвольные точки фигуры F, а A_1 и B_1 — их соответствующие образы при гомотетии с коэффициентом k, то $A_1B_1 = |k|AB$.

Подобие

Две фигуры называют подобными, если одну из них можно получить из другой в результате композиции двух преобразований: гомотетии и движения.

Площади подобных многоугольников

Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Глава 6. Начальные сведения по стереометрии

При изучении этой главы вы получите первичные представления о пирамиде, параллелепипеде, призме, сфере, шаре, цилиндре, конусе, их элементах и простейших свойствах.

Вы изучите формулы для вычисления объёмов и площадей поверхностей прямой призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара.

§ 21. Прямая призма. Пирамида

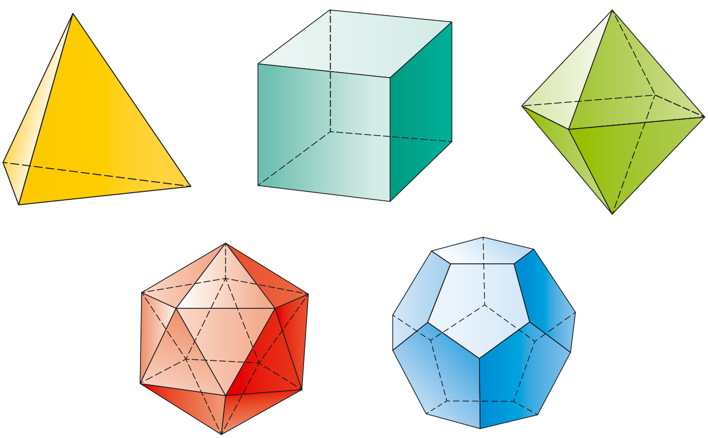
Вы завершили изучение курса планиметрии — раздела геометрии, изучающего свойства фигур, расположенных в одной плоскости. Однако большинство окружающих нас объектов не являются плоскими. Раздел геометрии, изучающий свойства фигур в **пространстве**, называют **стереометрией** («стереос» в переводе с греческого — пространственный).

Курс стереометрии вы будете изучать в 10–11 классах. Сейчас вы ознакомитесь с начальными сведениями этого раздела геометрии.

В стереометрии наряду с точками и прямыми рассматривают **плоскости**. Представление о плоскости дают поверхность стола, футбольное поле, поверхность водоёма в безветренную погоду. С этой фигурой вы познакомились в 5 классе.

В стереометрии, кроме точек, прямых и плоскостей, рассматривают **геометрические тела**. Примерами тел являются **многогранники** (рис. 256).

Рис. 256



Поверхность многогранника состоит из многоугольников. Их называют **гранями многогранника**. Стороны многоугольников называют **рёбрами многогранника**, а вершины – **вершинами многогранника**.

В 5 классе вы познакомились с одним из видов многогранника – прямоугольным параллелепипедом и его частным видом – кубом. На рисунке 257 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Прямоугольный параллелепипед является частным видом многогранника, который называют **призмой**.

Многогранник, изображенный на рисунке 258, является **шестиугольной призмой**. Две его грани $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – равные шестиугольники. Их называют **основаниями призмы**. Остальные шесть граней – это параллелограммы. Их называют **боковыми гранями призмы**.

Рис. 257

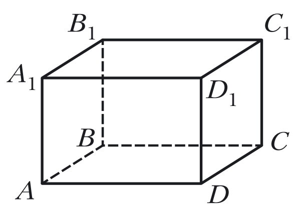
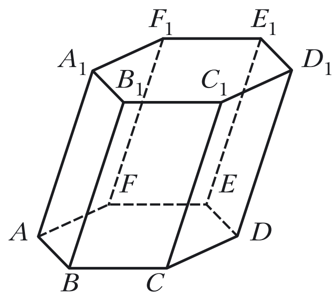


Рис. 258



Рёбра призмы, принадлежащие основаниям, называют **рёбрами оснований призмы**, а остальные рёбра – **боковыми рёбрами призмы**. Все боковые рёбра призмы параллельны и равны.

Перечисленные элементы призмы указаны на рисунке 259.

Рис. 259

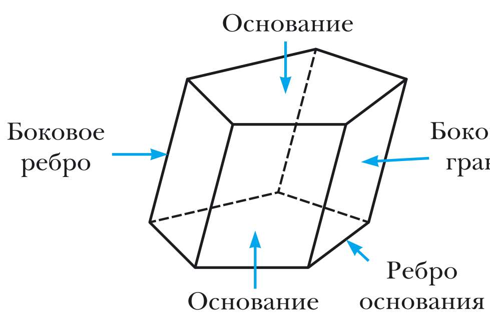
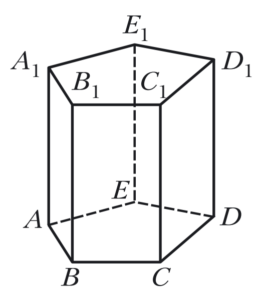


Рис. 260



Аналогично можно говорить о n-угольной призме.

На рисунке 260 изображена призма, боковые грани которой являются прямоугольниками. Такую призму называют **прямой**.

Прямоугольный параллелепипед — это частный вид прямой призмы.

Площадь боковой поверхности призмы — это сумма площадей всех её боковых граней.

Теорема 21.1

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра её основания на длину бокового ребра.

Доказательство

Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ — стороны основания прямой призмы, h — длина бокового ребра, $P_{\text{осн}}$ — периметр основания, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности. Поскольку боковые грани прямой призмы — прямоугольники, то:

$S_{\text{бок}} = a_1h + a_2h + ... + a_nh = (a_1 + a_2 + ... + a_n)h = P_{\text{осн}}h.$ ◄

Площадь поверхности призмы — это сумма площадей всех её граней.

Обозначив площадь основания $S_{\text{осн}}$, можно записать формулу для нахождения площади S поверхности призмы:

$$S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Каждое геометрическое тело имеет определённый объём. С такой величиной, как объём, вы часто встречаетесь в повседневной жизни: объём топливного бака, объём бассейна, объём классной комнаты, показатели потребления газа или воды на счётчиках и т. д.

Опыт подсказывает, что одинаковые ёмкости имеют одинаковые объёмы; объём ёмкости, состоящей из нескольких частей, равен сумме объёмов этих частей.

Эти примеры иллюстрируют такие свойства объёма фигуры:

1) *равные фигуры имеют равные объёмы;*

2) *объём фигуры равен сумме объёмов фигур, из которых она состоит.*

Как и в случаях с другими величинами (длина, площадь), следует ввести единицу измерения объёма.

За единицу измерения объёма выбирают куб, ребро которого равно единичному отрезку. Такой куб называют **единичным**.

Объём V прямой призмы вычисляют по формуле

$$\boxed{V = S_{\text{осн}} \cdot h,}$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы, h — длина бокового ребра.

Эта формула будет доказана в курсе стереометрии.

На рисунке 261 изображён многогранник, одна грань которого — многоугольник, а остальные — треугольники, имеющие общую вершину. Такой многогранник называют **пирамидой**. Общую вершину треугольников называют **вершиной пирамиды**. Грань, не содержащую вершину пирамиды, называют **основанием пирамиды**, остальные грани — **боковыми гранями пирамиды**.

Рёбра, принадлежащие основанию, называют **рёбрами основания пирамиды**, остальные рёбра — **боковыми рёбрами пирамиды**.

На рисунке 262 изображены треугольная пирамида $SABC$ и четырёхугольная пирамида $SABCD$.

Рис. 261

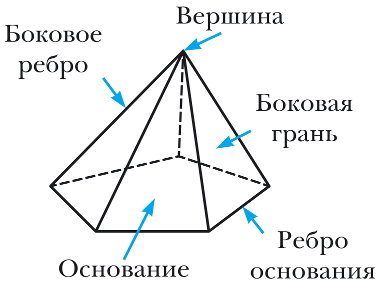
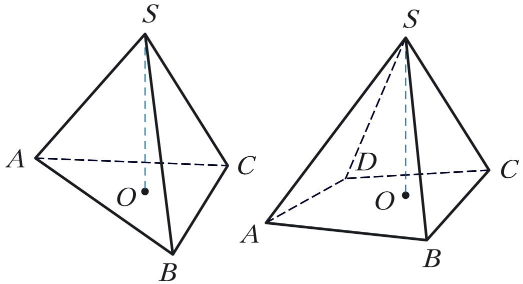


Рис. 262



Площадь поверхности пирамиды — это сумма площадей всех её граней.

В повседневной жизни мы говорим: «флагшток перпендикулярен поверхности земли» (рис. 263, *а*), «мачты парусника перпендикулярны поверхности палубы» (рис. 263, *б*), «шуруп вкручивают в доску перпендикулярно её поверхности» (рис. 263, *в*).

Эти примеры дают представление о перпендикуляре, опущенном из точки на плоскость.

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания, называют **высотой** пирамиды. На рисунке 262 отрезок SO — высота пирамиды.

Объём V пирамиды вычисляют по формуле

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h,}$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания пирамиды, h — длина высоты пирамиды.

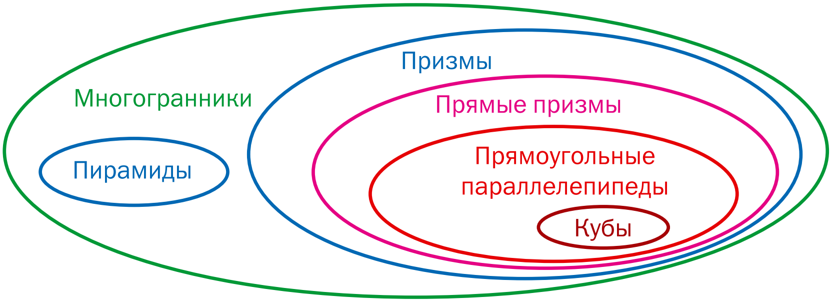
Рис. 263

а *б* *в*

Эта формула будет доказана в курсе стереометрии.

Связь между частными видами многогранников иллюстрирует схема, изображённая на рисунке 264.

Рис. 264



1. Из каких фигур состоит поверхность многогранника?
2. Перечислите элементы многогранника.
3. Какой геометрической фигурой является боковая грань призмы?
4. Каково взаимное расположение боковых рёбер призмы?
5. Какой геометрической фигурой является боковая грань прямой призмы?
6. Что такое площадь боковой поверхности призмы?

7. Что такое площадь поверхности призмы?
8. По какой формуле вычисляют объём прямой призмы?
9. Поясните, какой многогранник называют пирамидой.
10. Перечислите элементы пирамиды.
11. Что такое площадь поверхности пирамиды?
12. Что называют высотой пирамиды?
13. По какой формуле вычисляют объём пирамиды?

Упражнения

791. На рисунке 265 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите:
1) основания параллелепипеда;
2) боковые грани параллелепипеда;
3) боковые рёбра параллелепипеда;
4) рёбра нижнего основания параллелепипеда;
5) рёбра, параллельные ребру AB;
6) рёбра, параллельные ребру BB_1.

792. На рисунке 266 изображена прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Укажите:
1) основания призмы;
2) боковые грани призмы;
3) боковые рёбра призмы;
4) рёбра основания призмы;
5) все пары параллельных рёбер призмы.

793. На рисунке 267 изображена пирамида $MABC$. Укажите:
1) основание пирамиды;
2) вершину пирамиды;
3) боковые грани пирамиды;
4) боковые рёбра пирамиды;
5) рёбра основания пирамиды.

Рис. 265

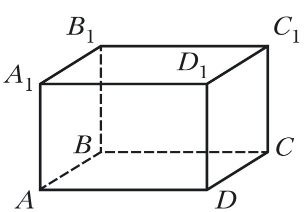


Рис. 266

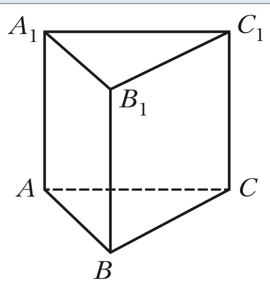
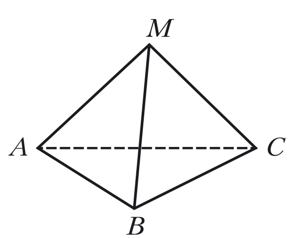


Рис. 267



794. На рисунке 268 изображена пирамида $SABCD$. Укажите:
1) основание пирамиды;
2) вершину пирамиды;
3) боковые грани пирамиды;
4) боковые рёбра пирамиды;
5) рёбра основания пирамиды.

Рис. 268

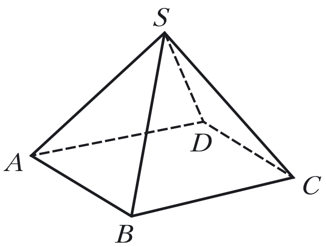
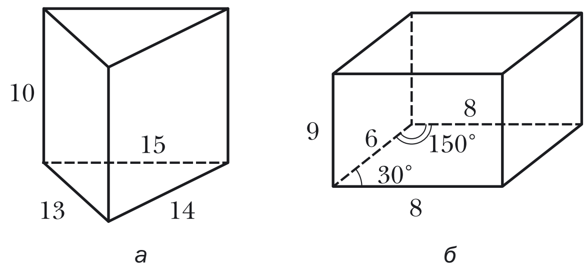


Рис. 269



795. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём прямой треугольной призмы, основанием которой является правильный треугольник со стороной 6 см, а боковое ребро равно 4 см.

796. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём прямой четырёхугольной призмы, основанием которой является квадрат со стороной 7 см, а боковое ребро равно 6 см.

797. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём прямой призмы, изображённой на рисунке 269 (длины отрезков даны в сантиметрах).

798. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём прямой призмы, изображённой на рисунке 270 (длины отрезков даны в сантиметрах).

799. Вычислите объём пирамиды $MABC$ (рис. 271), основание которой — треугольник ABC, $BC = 4{,}8$ см, AK — высота треугольника ABC, $AK = 3{,}5$ см, MO — высота пирамиды, $MO = 4{,}5$ см.

Рис. 270

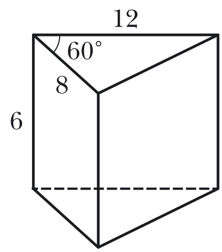
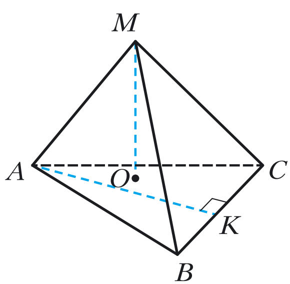


Рис. 271



800. Вычислите объём пирамиды $MABCD$ (рис. 272), основание которой — квадрат $ABCD$ со стороной 6 см, ME — высота пирамиды, $ME = 7{,}2$ см.

801. Вычислите объём пирамиды $AMNKP$ (рис. 273), основание которой — прямоугольник $MNKP$, $MN = 1{,}2$ см, $NK = 2{,}6$ см, AD — высота пирамиды, $AD = 2{,}5$ см.

Рис. 272

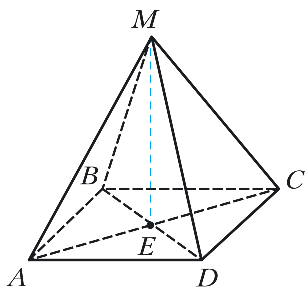
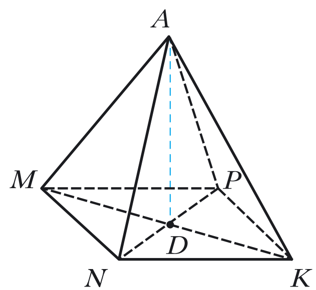


Рис. 273



802. Поперечное сечение чугунной трубы имеет форму квадрата. Внешняя ширина трубы равна 30 см, а толщина стенок — 5 см. Найдите массу погонного метра трубы, если плотность чугуна составляет $7{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3.

803. Поперечное сечение канавы имеет форму равнобокой трапеции, основания которой равны 1 м и 0,8 м, а высота — 0,6 м. Сколько понадобится рабочих, чтобы за 4 ч выкопать такую канаву длиной 15 м, если за час один рабочий выкапывает 0,75 м^3 грунта?

804. Слиток меди длиной 50 см имеет форму прямой призмы, основанием которой является равнобокая трапеция, параллельные стороны которой равны 6 см и 14 см, а боковая сторона — 8,5 см. Установите, есть ли внутри слитка пустоты или он является сплошным, если масса слитка равна 32 кг, а плотность меди — $9{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

805. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $SABC$, если $SA = SB = SC = 8$ см, $\angle ASB = \angle ASC = \angle CSB = 45°$.

806. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $SABCD$, если $SA = SB = SC = SD = 6$ см, $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle ASD = 30°$.

807. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 10 см, а одна из диагоналей — 16 см. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 11 см.

808. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 17 см, 17 см и 16 см. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 20 см.

Упражнения для повторения

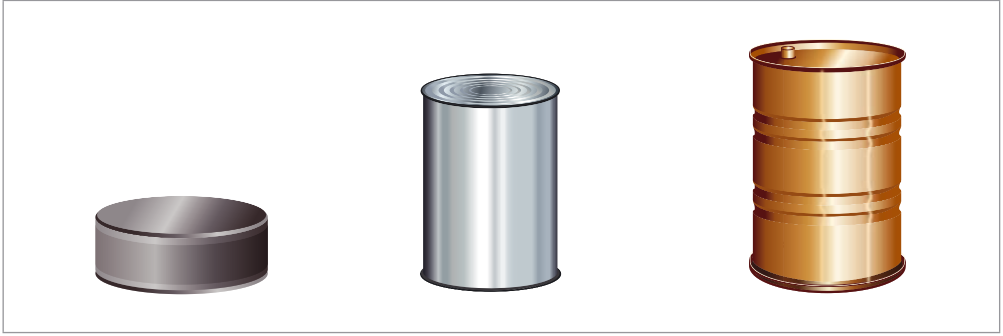
809. Два треугольника имеют по две соответственно равные стороны, а сумма углов треугольников между этими сторонами равна 180°. Докажите, что данные треугольники равновелики.

810. Даны точки A (5; 2), B (–7; 1) и C (1; –5), отрезок AM – медиана треугольника ABC. Составьте уравнение прямой AM.

§ 22. Цилиндр. Конус. Шар

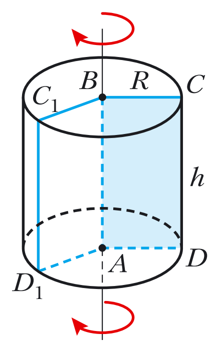
В повседневной жизни мы часто встречаемся с предметами, имеющими форму **цилиндра**: хоккейная шайба, консервная банка, бочка (рис. 274).

Рис. 274



Цилиндр можно представить как тело, полученное в результате вращения прямоугольника $ABCD$ вокруг одной из его сторон, например стороны AB (рис. 275). Прямую AB называют **осью цилиндра**.

Рис. 275



Стороны BC и AD, вращаясь, образуют равные круги, которые называют **основаниями цилиндра**. При вращении стороны CD образуется **боковая поверхность цилиндра**.

Каждый отрезок, положение которого может занять отрезок CD при вращении прямоугольника, называют **образующей ци-**

линдра. Например, на рисунке 275 отрезки CD и C_1D_1 – образующие цилиндра. Все образующие цилиндра равны и параллельны. Кроме того, каждая образующая перпендикулярна плоскостям оснований цилиндра.

Если боковую поверхность цилиндра разрезать по одной из его образующих, а потом развернуть её на плоскости, то получим прямоугольник. Одна из его сторон равна образующей, а длина другой стороны равна длине окружности, ограничивающей основание цилиндра (рис. 276). Полученный прямоугольник называют **развёрткой боковой поверхности цилиндра**.

Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{бок}$ равна площади её развёртки. Имеем:

$$\boldsymbol{S_{бок} = 2\pi Rh},$$

где R – радиус основания цилиндра, h – длина его образующей.

Площадь S поверхности цилиндра равна сумме площади боковой поверхности и площадей его оснований:

$$\boldsymbol{S = S_{бок} + 2S_{осн}}$$

Объём V цилиндра вычисляют по формуле

$$\boldsymbol{V = \pi R^2 h},$$

где R – радиус основания цилиндра, h – длина его образующей.

Конус можно представить как тело, полученное в результате вращения прямоугольного треугольника ABC вокруг одного из его катетов, например катета AC (рис. 277).

Катет BC, вращаясь, образует круг, который называют **основанием конуса**. При вращении гипотенузы AB образуется **боковая поверхность конуса**.

Все отрезки, положения которых может занять отрезок AB при вращении прямоугольного треугольника, называют **образующими конуса**. Например, на рисунке 277 отрезки AB и AB_1 – образующие конуса. Все образующие конуса равны.

Прямую AC называют **осью конуса**, отрезок AC – **высотой конуса**, точку A – **вершиной конуса**. Высота конуса перпендикулярна плоскости его основания.

Если боковую поверхность конуса разрезать по одной из его образующих, а затем развернуть её на плоскости, то получим сектор. Радиус этого сектора равен длине l образующей конуса, а длина дуги, ограничивающей сектор, – длине окружности, ограничивающей основание конуса (рис. 278).

Рис. 276

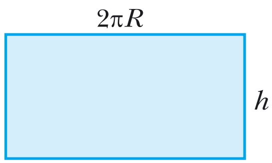


Рис. 277

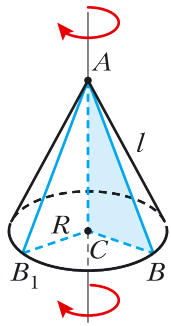
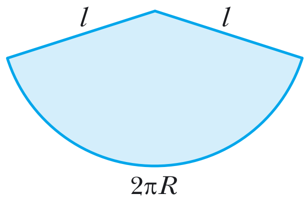


Рис. 278



Полученный сектор называют **развёрткой боковой поверхности конуса**.

Площадь боковой поверхности конуса $S_{\text{бок}}$ равна площади её развёртки, которую вычисляют по формуле

$$\boldsymbol{S_{\text{бок}} = \pi R l},$$

где R – радиус основания конуса, l – длина его образующей.

Площадь S поверхности конуса равна сумме площади боковой поверхности и площади его основания:

$$\boldsymbol{S = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}}$$

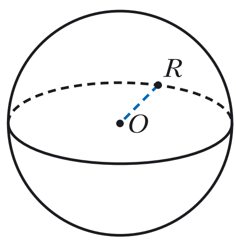
Объём V конуса вычисляют по формуле

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h},$$

где R – радиус основания конуса, h – длина его высоты.

Множество точек пространства, удалённых от данной точки на данное расстояние R, образуют фигуру, которую называют **сферой** (рис. 279). Данную точку называют **центром сферы**, а число R – **радиусом сферы**. Любой отрезок, соединяющий центр сферы с точкой сферы, также называют радиусом сферы. На рисунке 279 точка O – центр сферы, R – радиус.

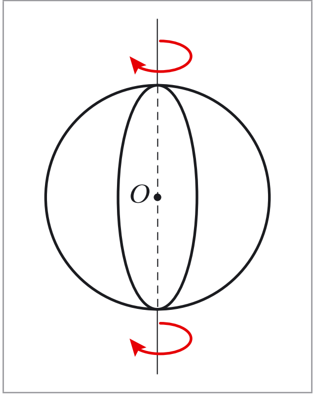
Рис. 279



Тело, представляющее часть пространства, ограниченную сферой, вместе со сферой называют **шаром**. Сферу, ограничивающую шар, называют **поверхностью шара**. Центр и радиус поверхности шара называют также **центром** и **радиусом шара**.

Шар можно представить как тело, полученное в результате вращения круга вокруг одного из диаметров (рис. 280).

Рис. 280



Площадь S поверхности шара, то есть площадь сферы, вычисляют по формуле

$$\boldsymbol{S = 4\pi R^2},$$

где R — радиус шара.

Объём V шара вычисляют по формуле

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3},$$

где R — радиус шара.

1. Перечислите элементы цилиндра.
2. Какая геометрическая фигура является развёрткой боковой поверхности цилиндра?
3. Чему равна площадь боковой поверхности цилиндра? Поверхности цилиндра?
4. По какой формуле вычисляют объём цилиндра?
5. Перечислите элементы конуса.
6. Какая геометрическая фигура является развёрткой боковой поверхности конуса?
7. Чему равна площадь боковой поверхности конуса? Поверхности конуса?
8. По какой формуле вычисляют объём конуса?
9. Какую фигуру называют сферой?
10. Перечислите элементы сферы.
11. Какую фигуру ограничивает сфера?
12. По какой формуле вычисляют площадь поверхности шара?
13. По какой формуле вычисляют объём шара?

Упражнения

811. На рисунке 281 изображён цилиндр. Укажите:
1) ось цилиндра;
2) образующую цилиндра;
3) радиус нижнего основания цилиндра;
4) радиус верхнего основания цилиндра.

812. Радиус основания цилиндра равен 6 см, а его образующая — 8 см. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём цилиндра.

813. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём цилиндра, развёртка которого изображена на рисунке 282 (длины отрезков даны в сантиметрах).

814. Прямоугольник, стороны которого равны 12 см и 5 см, вращается вокруг большей стороны. Найдите площадь поверхности и объём цилиндра, образовавшегося при этом.

815. На рисунке 283 изображён конус. Укажите:
1) вершину конуса;
2) центр его основания;
3) образующую конуса;
4) радиус основания конуса;
5) высоту конуса.

816. Радиус основания конуса равен 4 см, а его образующая — 7 см. Найдите площадь боковой поверхности и площадь поверхности конуса.

817. Найдите площадь поверхности конуса, развёртка которого изображена на рисунке 284 (длины отрезков даны в сантиметрах).

Рис. 281

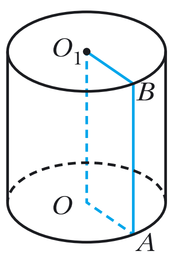


Рис. 282

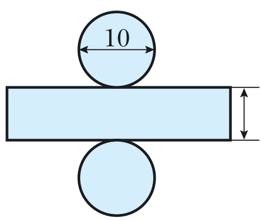


Рис. 283

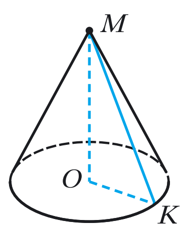
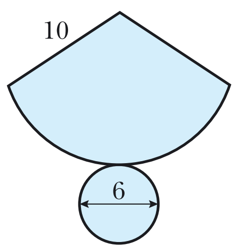


Рис. 284



818. Найдите объём конуса, высота которого равна 12 см, а радиус основания — 3 см.

819. Найдите площадь поверхности и объём шара, радиус которого равен 3 см.

820. Масса 10 м медного провода кругового сечения равна 106,8 г. Найдите диаметр провода, если плотность меди составляет $8,9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

821. Определите давление кирпичной колонны цилиндрической формы высотой 3 м на фундамент, если диаметр колонны равен 1,2 м, а масса 1 м^3 кирпича равна 1,8 т.

822. Диаметр основания конуса равен 16 см, а его образующая — 17 см. Найдите площадь поверхности и объём конуса.

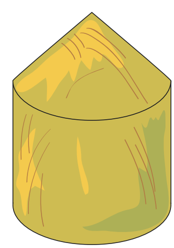
823. Прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 16 см вращается вокруг меньшего катета. Найдите площадь боковой поверхности и объём конуса, образовавшегося при этом.

824. Зерно ссыпали в горку конической формы высотой 1,2 м. Какова масса этой горки зерна, если радиус её основания равен 2 м, а масса 1 м^3 зерна составляет 750 кг?

825. Жидкость из полностью заполненного сосуда конической формы, высота которого равна 24 см, а радиус основания — 6 см, перелили в сосуд цилиндрической формы, радиус основания которого равен 8 см. Определите высоту уровня жидкости в сосуде цилиндрической формы.

826. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом (рис. 285). Радиус основания стога равен 1,5 м, высота — 3 м, причём высота цилиндрической части стога — 2,4 м. Найдите массу стога, если масса 1 м^3 сена составляет 30 кг.

Рис. 285



827. Как изменятся площадь поверхности и объём шара, если его радиус увеличить в 2 раза?

828. Радиус одного шара равен 3 см, а другого — 4 см. Найдите отношение площадей поверхностей и отношение объёмов данных шаров.

829. Диаметр внешней сферы железного пустотелого шара равен 12 см, а диаметр внутренней сферы — 10 см. Найдите массу шара, если плотность железа равна $7,9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Упражнения для повторения

830. Две стороны треугольника равны 17 см и 28 см, а его площадь — 210 см^2. Найдите третью сторону треугольника.

831. Составьте уравнение окружности, центр которой принадлежит оси абсцисс, радиус равен 5, и которая проходит через точку M (1; 4).

Дружим с компьютером

Вы продолжите совершенствовать свои навыки пользования компьютером, приобретённые в 7 и 8 классах, осваивать новые инструменты и новые программные средства. Напомним, что, кроме заданий, приведённых в этом разделе, вы можете использовать разнообразные программы, созданные для освоения школьного курса геометрии.

Вы можете использовать глобальную сеть Интернет для поиска нужной вам информации.

В учебнике приведены краткие исторические сведения о знаменитых учёных, труды которых связаны с изучаемыми темами. С помощью Интернета вы можете получить больше информации об их биографиях и научных открытиях.

Если вы планируете выбрать профессию, которая требует углублённых знаний по математике, то можно начать осваивать математические пакеты (например, Mathcad, MATHLAB и т. п.), содержащие мощный инструментарий для математических вычислений, геометрических построений и т. п. Для будущего инженера могут оказаться полезными знания по инженерной графике и умение строить сложные чертежи (например, AutoCAD). Вы можете изучать эти программные средства, выполняя задания курса геометрии.

Задания «Дружим с компьютером»

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Основными направлениями являются задания на построение геометрических фигур, которые вы будете выполнять с помощью графического редактора, и вычисления, которые вы можете выполнять с помощью калькулятора либо математических пакетов.

Кроме этих заданий, вы можете решать задачи из рубрики «Практические задания» не только в тетради, но и с помощью компьютерных программ.

Тригонометрические функции угла от 0° до 180°

1. Научитесь вычислять тригонометрические функции угла, а также находить величину угла по значениям его тригонометрических функций.

Теорема косинусов

2. Проиллюстрируйте следствие из теоремы косинусов следующим образом.

Выберите набор положительных чисел a, b и c, удовлетворяющих условию $a^2 < b^2 + c^2$, где a — наибольшее число из выбранных. Постройте набор отрезков с заданными длинами a, b и c. Составьте из этих отрезков треугольник. Получился ли он остроугольным? Проделайте эти же действия для условий $a^2 > b^2 + c^2$ и $a^2 = b^2 + c^2$. Числа a, b и c должны удовлетворять условию $a < b + c$.

Теорема синусов

3. Изобразите произвольный треугольник, измерьте с помощью средств графического редактора его стороны и углы. Проверьте, выполняется ли теорема синусов. Вычисления проводите также с помощью компьютера.

Решение треугольников. Формулы для нахождения площади треугольника

4. Задания § 4 и 5, требующие нахождения значений тригонометрических функций и проведения большого объёма вычислений, выполняйте с помощью компьютера.

Правильные многоугольники и их свойства

5. При построении правильных многоугольников можно выбрать один из двух следующих подходов: 1) использовать теорему 6.2 и формулу для вычисления величины центрального угла вписанного многоугольника; 2) использовать информацию о величине угла правильного многоугольника и длине его стороны.

6. Постройте несколько правильных многоугольников с заданным количеством вершин.

Длина окружности. Площадь круга

7. Вычислите несколько раз длину окружности и площадь круга, используя приближения числа π с различной точностью.

Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка

8. Большинство графических редакторов представляют поле для рисования в виде координатной плоскости. Исследуйте, каким образом задаются координаты точек на этой плоскости. Продумайте, как вы можете использовать этот инструментарий для выполнения построений.

Уравнение фигуры. Уравнение окружности

9. Если вы изучаете математические пакеты, то можете с их помощью построить несколько произвольных фигур с заданными уравнениями.

Угловой коэффициент прямой

10. Какие средства графического редактора можно использовать, чтобы построить прямую с заданным угловым коэффициентом?

Понятие вектора

11. Изобразите с помощью графического редактора несколько векторов. Какой тип линии удобно выбрать для изображения вектора? Какой инструмент вы используете для построения коллинеарных векторов? Сонаправленных векторов? Противоположно направленных векторов? Определите модули построенных векторов. Как это можно сделать проще всего?

Координаты вектора

12. Изобразите на экране компьютера декартову систему координат, выберите удобный единичный отрезок. Задайте координаты вектора и координаты некоторой точки. Отложите от этой точки вектор с заданными координатами. Как проще всего это сделать?

Сложение и вычитание векторов

13. Нарисуйте несколько произвольных векторов. С помощью какого инструмента проще всего находить сумму и разность этих векторов?

Умножение вектора на число

14. Нарисуйте произвольный вектор и задайте несколько произвольных чисел. Умножьте построенный вами вектор на эти числа. С помощью какого инструмента проще всего построить вектор, являющийся произведением вектора на число?

Скалярное произведение векторов

15. Постройте на координатной плоскости два произвольных вектора. Найдите величину угла между ними с помощью следствия из теоремы 16.2. Проверьте полученный результат, определив угол между этими векторами с помощью средств графического редактора.

Движение (перемещение) фигуры. Параллельный перенос

16. Определите, какие средства графического редактора позволяют выполнять перемещение фигуры. Какие способы перемещения, кроме параллельного переноса, можно реализовать?

Осевая и центральная симметрии. Поворот

17. Найдите средства графического редактора, с помощью которых можно построить: 1) фигуру, симметричную данной фигуре относительно данной прямой; 2) фигуру, симметричную данной фигуре относительно данной точки.

Гомотетия. Подобие фигур

18. Найдите средства графического редактора, с помощью которых можно построить фигуру, подобную данной фигуре. Какие средства надо использовать, чтобы эти фигуры были подобны с заданным коэффициентом?

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект – это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсов. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.

2. Работа начинается с составления предварительного плана, в котором отражается замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками и литературой с помощью руководителя проекта составляется окончательный план.

3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.

4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.

5. Примерный объём работы – 10–15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.

6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Выдающиеся геометры России

Рекомендуемая литература:

1) *Белл Э. Т.* Творцы математики. – М. : Просвещение, 1979.

2) *Гнеденко Б. В.* Очерки по истории математики в России. – М. : КомКнига, 2005.

2. Геометрия орнаментов и узоров

Рекомендуемая литература:

1) *Александров С.* Измельчающиеся узоры // Квант. – 1980. – № 4.

2) *Земляков А.* Орнаменты // Квант. – 1977. – № 3.

3) *Корепин В.* Узоры Пенроуза и квазикристаллы // Квант. – 1987. – № 6.

3. Геометрия и астрономия

Рекомендуемая литература:

1) *Карпушина Н. М.* Математика и астрономия // Математика для школьников. – 2005. – № 1.

2) Мир математики : в 45 т. Т. 30 : Роза Мария Рос. Музыка сфер. Астрономия и математика. – М. : Де Агостини, 2014.

3) Мир математики : в 45 т. Т. 38 : Иоланда Гевара, Карлес Пюнг. Измерение мира. Календари, меры длины и математика. – М. : Де Агостини, 2014.

4) *Перельман Я. И.* Занимательная геометрия на вольном воздухе и дома. – М. : Центрполиграф, 2015.

5) *Протасов В. Ю.* Геометрия звёздного неба // Квант. – 2010. – № 2.

6) *Рожанский И. Д.* Анаксагор. – М. : Мысль, 1983.

4. Золотое сечение

Рекомендуемая литература:

1) *Васютинский Н. А.* Золотая пропорция. – СПб : Диля, 2006.

2) *Ливио М.* Число Бога. Золотое сечение – формула мироздания. – М. : АСТ, 2015.

3) Мир математики : в 40 т. Т. 1 : Фернандо Корбалан. Золотое сечение. Математический язык красоты. – М. : Де Агостини, 2014.

4) *Тимердинг Г. Е.* Золотое сечение. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.

5) *Шмелёв И.* и др. Золотое сечение. Три взгляда на природу гармонии. – М. : Стройиздат, 1990.

6) *Мерзляк А. Г.* и др. Математика : 6 класс. – М. : Вентана-Граф, 2015.

5. Паркеты из правильных многоугольников

Рекомендуемая литература:

1) *Болтянский В.* Паркет из четырёхугольников // Квант. – 1989. – № 11.

2) *Колмогоров А.* Паркеты из правильных многоугольников // Квант. – 1986. – № 8.

3) *Михайлов О.* Одиннадцать правильных паркетов // Квант. – 1979. – № 2.

6. Кривые второго порядка

Рекомендуемая литература:

1) *Бронштейн И.* Гипербола. Парабола. Эллипс // Квант. – 1975. – № 1, 3, 4.

2) *Бронштейн И.* Общие свойства конических сечений // Квант. – 1975. – № 5.

3) *Жаутыков О.* Кривые второго порядка // Квант. – 1977. – № 8.

4) *Маркушевич А. И.* Замечательные кривые. – М. : Наука, 1978.

5) *Энциклопедия* для детей. Т. 11 : Математика. – М. : Аванта+, 2003.

7. Метод координат

Рекомендуемая литература:

1) *Болибрух А., Уроев В., Шабунин М.* Задачи на координатной плоскости // Квант. – 1986. – № 11.

2) *Габович И. Г.* Алгоритмический подход к решению геометрических задач. – М. : Просвещение, 1996.

3) *Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А.* Метод координат // Библиотечка физико-математической школы. Математика. – М. : Наука, 1973. – Вып. 1.

4) *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. – М. : МЦНМО, 2006.

8. Векторный метод в геометрии

Рекомендуемая литература:

1) *Болтянский В.* Три точки на одной прямой // Квант. – 1978. – № 10.

2) *Габович И. Г.* Алгоритмический подход к решению геометрических задач. – М. : Просвещение, 1996.

3) *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. – М. : МЦНМО, 2006.

9. Теоремы о конкурентных прямых и коллинеарных точках

Рекомендуемая литература:

1) *Заславский А.* Некоторые факты проективной геометрии // Квант. – 1986. – № 1.

2) *Коксетер Г. С., Грейтцер С. П.* Новые встречи с геометрией. – М. : Наука, 1978.

3) *Куланин Е.* Об одной трудной геометрической задаче // Квант. – 1992. – № 7.

4) *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. – М. : МЦНМО, 2006.

5) *Савин А.* Проективная плоскость // Квант. – 1974. – № 3.
6) *Шарыгин И.Ф.* Геометрия. Планиметрия. – М. : Дрофа, 2001.

10. Кривые постоянной ширины

Рекомендуемая литература:

1) *Болтянский В. Г., Яглом И. М.* Выпуклые фигуры. – М. : Гостехиздат, 1951.
2) *Коган Б.* Удивительные катки // Квант. – 2001. – № 5.
3) *Радемахер Г., Тёплиц О.* Числа и фигуры. – М. : Физматгиз, 1962.

11. Применение геометрических преобразований в задачах на построение

Рекомендуемая литература:

1) *Александрова И. И.* Сборник геометрических задач на построение. – М. : Учпедгиз, 1950.
2) *Блинков А. Д., Блинков Ю. А.* Геометрические задачи на построение. – М. : МЦНМО, 2010.
3) *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. – М. : МЦНМО, 2006.
4) *Шарыгин И. Ф.* Геометрия. Планиметрия. – М. : Дрофа, 2001.

12. Геометрия масс

Рекомендуемая литература:

1) *Балк М. Б.* Геометрические приложения понятия о центре тяжести. – М. : Гостехиздат, 1959.
2) *Балк Б. М., Болтянский В. Г.* Геометрия масс // Библиотечка «Квант». – М. : Наука, 1987. – Вып. 61.
3) *Мякишев А. Г.* Элементы геометрии треугольника. – М. : МЦНМО, 2002.

Упражнения для повторения курса геометрии 9 класса

Глава 1. Решение треугольников

832. Две стороны треугольника равны 4 см и 10 см, а синус угла между ними равен $\frac{4}{5}$. Найдите третью сторону треугольника.

833. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 2$ см, $AD = 4$ см, $\angle BAD = 60^\circ$. Найдите косинус угла между прямыми AC и BD.

834. Установите, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник со сторонами: 1) 4 см, 4 см и 5 см; 2) 5 см, 6 см и 9 см; 3) 5 см, 12 см и 13 см.

835. Одна из сторон треугольника равна 21 см, а две другие стороны относятся как 3 : 8. Найдите неизвестные стороны треугольника, если угол между ними равен 60°.

836. Одна из сторон треугольника равна 3 см, а вторая сторона — $\sqrt{7}$ см, причём угол, противолежащий второй стороне, равен 60°. Найдите неизвестную сторону треугольника.

837. Одна из сторон параллелограмма на 4 см больше другой, а его диагонали равны 12 см и 14 см. Найдите периметр параллелограмма.

838. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AD = a$, $BD = d$, $BD \perp AD$. Найдите диагональ AC.

839. В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $AD = 8$ см, $CD = 4\sqrt{3}$ см. Окружность, проходящая через точки A, B и C, пересекает прямую AD в точке K, $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите отрезок BK.

840. Основания трапеции равны 3 см и 7 см, а боковые стороны — 6 см и 5 см. Найдите косинусы углов трапеции.

841. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке D, $BD = 1$ см, $AD = 5$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите отрезок CD.

842. Стороны треугольника равны 11 см, 12 см и 13 см. Найдите медиану треугольника, проведённую к его большей стороне.

843. Найдите биссектрису треугольника, которая делит его сторону на отрезки длиной 3 см и 4 см и образует с этой стороной угол, равный 60°.

844 Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, $BD = a$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 75^\circ$. Найдите отрезок AD.

845. Найдите отношение сторон равнобедренного треугольника, один из углов которого равен 120°.

846. В треугольнике ABC известно, что $AC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 60°$. Найдите радиус окружности, проходящей через центр вписанной окружности треугольника ABC и точки A и C.

847. Две стороны треугольника равны 5 см и 8 см, а угол между ними — 60°. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника.

848. Найдите биссектрису треугольника ABC, проведённую из вершины A, если $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$.

849. Биссектриса угла BAD параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M. Найдите площадь треугольника ABM, если $AB = 4$ см, $\angle BAD = 60°$.

850. Найдите наибольшую высоту, радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 4 см, 13 см и 15 см.

851. Радиусы двух окружностей равны 17 см и 39 см, а расстояние между их центрами — 44 см. Найдите длину общей хорды данных окружностей.

852. Вычислите площадь параллелограмма, одна из сторон которого равна 15 см, а диагонали — 11 см и 25 см.

853. Основания трапеции равны 16 см и 44 см, а боковые стороны — 17 см и 25 см. Найдите площадь трапеции.

854. Основания трапеции равны 5 см и 12 см, а диагонали — 9 см и 10 см. Найдите площадь трапеции.

Глава 2. Правильные многоугольники

855. Найдите площадь правильного n-угольника, если радиус вписанной в него окружности равен 6 см, а n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

856. В окружность вписан квадрат со стороной 4 см. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в эту же окружность.

857. Найдите отношение площадей правильных треугольника и шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

858. Середины сторон правильного двенадцатиугольника соединены через одну так, что полученной фигурой является правильный шестиугольник. Найдите сторону данного двенадцатиугольника, если сторона полученного шестиугольника равна a.

859. Длина дуги окружности равна 6π см, а её градусная мера — 24°. Найдите радиус окружности.

860. На катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги этой окружности, которая содержится вне треугольника и отсекается гипотенузой AB, если $\angle A = 42°$, $AC = 8$ см.

861. Сторона квадрата равна $2\sqrt{2}$ см. Найдите длину дуги описанной окружности данного квадрата, концами которой являются две его соседние вершины.

862. Расстояние между центрами двух кругов радиуса R равно R. Найдите площадь фигуры, являющейся общей частью этих кругов, и длину линии, ограничивающей эту фигуру.

863. Площадь кругового сектора равна $2{,}4\pi$ см^2. Найдите градусную меру дуги этого сектора, если радиус круга равен 4 см.

864. Диаметр колеса вагона метрополитена равен 78 см. За 2,5 мин колесо делает 1000 оборотов. Найдите скорость вагона метрополитена в километрах в час. Ответ округлите до десятых.

865. Найдите длину окружности, вписанной в сегмент, длина дуги которого равна m, а градусная мера равна $120°$.

866. К окружности, радиус которой равен R, проведены две касательные, угол между которыми равен $60°$. Найдите площадь фигуры, ограниченной касательными и меньшей из дуг, концами которых являются точки касания.

Глава 3. Декартовы координаты

867. Вершинами треугольника являются точки A (–4; 1), B (–2; 4) и C (0; 1). Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный, и найдите его площадь.

868. Найдите координаты точки пересечения серединного перпендикуляра отрезка AB с осью абсцисс, если A (5; –3), B (4; 6).

869. Найдите координаты точки пересечения серединного перпендикуляра отрезка CD с осью ординат, если C (2; 1), D (4; –3).

870. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (–12; 6), B (0; 11), C (5; –1), D (–7; –6) является квадратом.

871. Точка M (5; –2) является одним из концов диаметра окружности, точка N (2; 0) – центр окружности. Найдите координаты второго конца диаметра.

872. Установите, лежат ли точки A (–4; –3), B (26; 7), C (2; –1) на одной прямой. В случае утвердительного ответа укажите, какая из точек лежит между двумя другими.

873. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются точки A (5; 1), B (9; –2), C (7; 2), – прямоугольный, и составьте уравнение окружности, описанной около него.

874. Установите, является ли отрезок CD диаметром окружности $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 52$, если C (–8; 7), D (4; –1).

875. Окружность, центр которой принадлежит оси ординат, проходит через точки A (1; 2) и B (3; 6). Принадлежит ли этой окружности точка C (–3; 4)?

876. Окружность с центром в точке M (–5; 3) касается оси ординат. Найдите координаты точек пересечения окружности с осью абсцисс.

877. Найдите длину линии, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

878. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку P (–3; 5), угловой коэффициент которой равен 6.

879. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку S (–1; 4) и образует угол 135° с положительным направлением оси абсцисс.

880. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A (–3; 1) параллельно прямой $5x + 3y = 6$.

881. Найдите уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки A (–3; –2) и B (2; 5).

Глава 4. Векторы

882. Две вершины прямоугольника $ABCD$ – точки A (3; 2) и B (3; –4). Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ равен 10. Найдите координаты точек C и D.

883. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 286). Выразите векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

884. Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм. Найдите:

1) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$;

2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$.

885. Найдите модуль вектора $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, где $\vec{a}$ (1; –2), $\vec{b}$ (–1; 3).

886. Точки E и F – середины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$ соответственно (рис. 287). Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.

Рис. 286

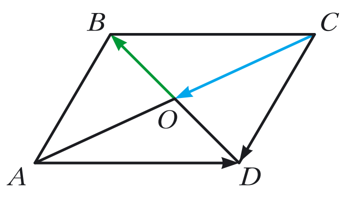
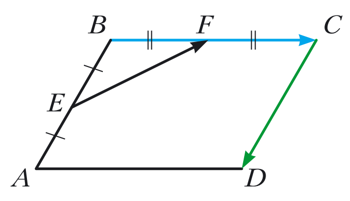


Рис. 287

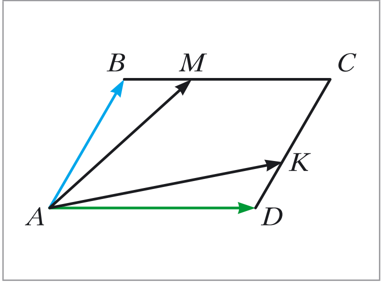


887. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно, причём $BM = \frac{1}{4}BC$, $CK = \frac{2}{3}CD$ (рис. 288). Выразите:

1) векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$;

2) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{AK} = \vec{n}$.

Рис. 288



888. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены такие точки D и E соответственно, что $AD : DC = 1 : 2$, $BE : EC = 2 : 1$. Выразите:

1) векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$;

2) векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.

889. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KP}$, если M (4; –1), N (–6; 5), K (7; –2), P (2; 1)?

890. Найдите значение k, при котором векторы $\vec{a}$ (k; –2) и $\vec{b}$ (6; 3) коллинеарны.

891. Даны векторы $\vec{a}$ (3; –2) и $\vec{b}$ (x; 4). При каком значении x выполняется равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$?

892. Найдите косинусы углов треугольника ABC, если A (–3; –4), B (2; –3), C (3; 5). Установите вид треугольника.

893. Даны векторы $\vec{a}$ (2; –1) и $\vec{b}$ (1; –2). Найдите значение m, при котором векторы $\vec{a} + m\vec{b}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

894. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и $\vec{m} \perp \vec{n}$.

895. Даны векторы $\vec{a}$ (2; –4) и $\vec{b}$ (–1; 1). Найдите:

1) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} + \vec{b}|$.

896. Составьте уравнение прямой, которая касается окружности с центром M (0; –4) в точке A (5; –3).

Глава 5. Геометрические преобразования

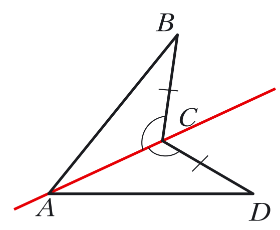
897. При параллельном переносе образом точки A (3; –2) является точка B (5; –3). Какая точка является образом точки C (–3; 4) при этом параллельном переносе?

898. Постройте образы точек A (1; –3), B (0; –5) и C (2; 1) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (–2; 1). Запишите координаты построенных точек.

899. Даны точки C (7; –4) и D (–1; 8). При параллельном переносе образом середины отрезка CD является точка P (–1; –3). Найдите координаты точек, являющихся образами точек C и D.

900. На рисунке 289 $CB = CD$, $\angle ACB = \angle ACD$. Докажите, что точки B и D симметричны относительно прямой AC.

Рис. 289



901. Найдите координаты точек, симметричных точке K (4; –2) относительно осей координат и начала координат.

902. Найдите x и y, если точки A (x; –2) и B (3; y) симметричны относительно оси абсцисс.

903. Даны луч OA и точка B, ему не принадлежащая. Постройте луч, симметричный данному относительно точки B.

904. Симметричны ли точки M (–3; 10) и N (–1; 6) относительно точки K (1; 4)?

905. Запишите уравнение окружности, симметричной окружности $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 11$ относительно:

1) начала координат; 2) точки M (–3; 3).

906. Даны точки K и O. Постройте точку K_1, являющуюся образом точки K при повороте вокруг точки O: 1) на угол 130° против часовой стрелки; 2) на угол 40° по часовой стрелке.

907. Даны отрезок AB и точка O, ему не принадлежащая. Постройте отрезок A_1B_1, являющийся образом отрезка AB при повороте на угол 50° вокруг точки O по часовой стрелке.

908. На какой угол надо повернуть прямоугольник вокруг его центра симметрии, чтобы его образом был этот же прямоугольник?

909. Постройте треугольник, гомотетичный данному тупоугольному треугольнику, если центром гомотетии является центр окружности, описанной около треугольника, коэффициент гомотетии $k = -2$.

910. Образом точки A (8; –2) при гомотетии с центром в начале координат является точка B (4; –1). Найдите коэффициент гомотетии.

911. Стороны двух правильных треугольников равны 8 см и 28 см. Чему равно отношение их площадей?

912. Многоугольник F_1 подобен многоугольнику F_2 с коэффициентом подобия k. Буквами P_1, P_2, S_1, S_2 обозначили соответственно их периметры и площади. Заполните пустые ячейки таблицы.

P_1	P_2	S_1	S_2	k
	19	64	16	
12	36	7		
	35	4	100	
	21	36		2

913. Прямая, параллельная стороне треугольника длиной 6 см, делит его на две фигуры, площади которых относятся как 1 : 3. Найдите отрезок этой прямой, содержащийся между сторонами треугольника.

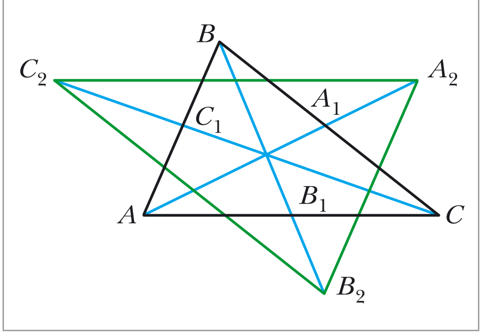
914. На стороне BC квадрата $ABCD$ отметили точку M так, что $BM : MC = 1 : 2$. Отрезки AM и BD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника BPM, если площадь треугольника APD равна 27 см^2.

915. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите площадь трапеции, если $AB : BM = 5 : 3$, $AD > BC$, а площадь треугольника AMD равна 32 см^2.

916. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. К окружности, вписанной в этот треугольник, проведена касательная, параллельная основанию AC, которая пересекает стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Вычислите площадь треугольника MBK.

917. На продолжениях медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC отметили соответственно точки A_2, B_2 и C_2 так, что $A_1A_2 = \frac{1}{2}AA_1$, $B_1B_2 = \frac{1}{2}BB_1$, $C_1C_2 = \frac{1}{2}CC_1$ (рис. 290). Найдите площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площадь треугольника ABC равна 1.

Рис. 290



Глава 6. Начальные сведения по стереометрии

918. Основанием прямой призмы является параллелограмм, стороны которого равны 3 см и $4\sqrt{2}$ см, а острый угол — 45°. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объём призмы, если её боковое ребро равно 6 см.

919. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 13 см, а один из катетов — 12 см. Найдите площадь боковой поверхности и объём призмы, если её боковое ребро равно 10 см.

920. Найдите объём треугольной пирамиды, основание которой — правильный треугольник со стороной 8 см, а высота пирамиды равна 5 см.

921. Радиус основания цилиндра равен 3 см, а его образующая — 6 см. Найдите площадь поверхности и объём цилиндра.

922. Прямоугольник, стороны которого равны 6 см и 4 см, вращается вокруг большей стороны. Найдите площадь поверхности и объём образовавшегося цилиндра.

923. Радиус основания конуса равен 8 см, а высота — 15 см. Найдите площадь поверхности и объём конуса.

924. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 см и 4 см, вращается вокруг меньшего катета. Найдите площадь поверхности и объём образовавшегося конуса.

925. Полукруг, диаметр которого равен 6 см, вращается вокруг диаметра. Найдите площадь поверхности и объём образовавшегося шара.

926. Радиус шара увеличили в k раз. Во сколько раз изменились площадь поверхности и объём шара?

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

Эта рубрика особая. В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные геометрические знания, а смекалка, изобретательность и сообразительность. Эти задачи полезны, они развивают «геометрическое зрение» и интуицию.

927. Покажите, что любой треугольник можно разрезать на три части так, что из полученных частей можно сложить прямоугольник.

928. В круг радиуса 1 см вписан пятиугольник. Докажите, что сумма длин его сторон и диагоналей меньше 17 см.

929. Дан квадрат размером 99×99 клеток. Каждая клетка квадрата окрашена в чёрный или в белый цвет. Разрешается одновременно перекрасить все клетки некоторого столбца или некоторой строки в тот цвет, клеток которого в этом столбце или в этой строке до перекрашивания было больше. Всегда ли можно добиться того, чтобы все клетки квадрата стали окрашенными в один цвет?

930. На плоскости отметили несколько точек. Некоторые из них отметили красным цветом, другие — синим. Известно, что точек каждого цвета не меньше трёх и никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то три точки одного цвета являются вершинами треугольника, на сторонах которого может лежать не более двух точек другого цвета.

931. На плоскости отметили точки A и B. С помощью одного циркуля постройте точку C такую, чтобы точка B являлась серединой отрезка AC.

932. Какое наименьшее значение может принимать радиус круга, из которого можно вырезать треугольник со сторонами 2 см, 3 см, 4 см?

933. Можно ли из квадрата со стороной 10 см вырезать несколько кругов, сумма диаметров которых больше 5 м?

934. Дан квадрат размером 101×101 клетку. Клетки квадрата раскрасили в шахматном порядке в чёрный и белый цвета так, что центральная клетка оказалась чёрной. Для каждой пары разноцветных клеток откладывают вектор, начало которого совпадает с центром чёрной клетки, а конец — с центром белой. Докажите, что сумма всех отложенных векторов равна нуль-вектору.

935. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 м расположено 7 точек. Докажите, что среди них найдутся 2 точки на расстоянии не больше 1 м.

936. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы любые 3 из них являлись вершинами равнобедренного треугольника.

Сведения из курса геометрии 7–8 классов

Простейшие геометрические фигуры и их свойства

1. Точки и прямые

- *Основное свойство прямой.* Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.
- Две прямые, имеющие общую точку, называют пересекающимися.
- Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

2. Отрезок и его длина

- Точки A и B прямой a (рис. 291) ограничивают часть прямой, которую вместе с точками A и B называют отрезком, а точки A и B — концами этого отрезка.

Рис. 291

- Два отрезка называют равными, если их можно совместить наложением.
- Равные отрезки имеют равные длины, и наоборот, если длины отрезков равны, то равны и сами отрезки.
- *Основное свойство длины отрезка.* Если точка C является внутренней точкой отрезка AB, то отрезок AB равен сумме отрезков AC и CB, т. е. $AB = AC + CB$.
- Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB.

3. Луч. Угол

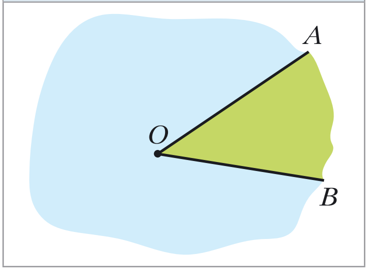
- Точка O прямой AB (рис. 292) разбивает прямую на две части, каждую из которых вместе с точкой O называют лучом или полупрямой. Точку O называют началом луча.

Рис. 292

- Два луча, имеющие общее начало и лежащие на одной прямой, называют дополнительными.

- ✔ Два луча OA и OB, имеющие общее начало (рис. 293), разбивают плоскость на две части, каждую из которых вместе с лучами OA и OB называют углом. Лучи OA и OB называют сторонами угла, а точку O — вершиной угла.

Рис. 293

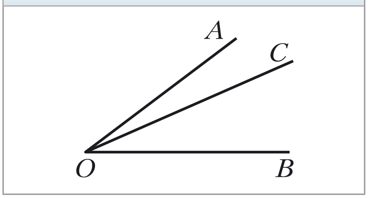


- ✔ Угол, сторонами которого являются дополнительные лучи, называют развёрнутым.
- ✔ Два угла называют равными, если их можно совместить наложением.
- ✔ Биссектрисой угла называют луч с началом в его вершине, делящий этот угол на два равных угла.

4. Измерение углов

- ✔ Каждый угол имеет определённую величину (градусную меру).
- ✔ Угол, градусная мера которого меньше $90°$, называют острым. Угол, градусная мера которого равна $90°$, называют прямым. Угол, градусная мера которого больше $90°$, но меньше $180°$, называют тупым.
- ✔ Равные углы имеют равные величины, и наоборот, если величины углов равны, то равны и сами углы.
- ✔ *Основное свойство величины угла.* Если луч OC делит угол AOB на два угла AOC и COB (рис. 294), то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Рис. 294



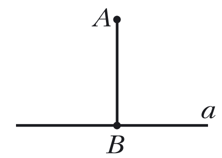
5. Смежные и вертикальные углы

- ✔ Два угла называют смежными, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.
- ✔ Сумма смежных углов равна $180°$.
- ✔ Два угла, отличные от развёрнутого, называют вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого.
- ✔ Вертикальные углы равны.

6. Перпендикулярные прямые. Серединный перпендикуляр

- ✔ Две прямые называют перпендикулярными, если при их пересечении образовался прямой угол.
- ✔ Неперпендикулярные прямые при пересечении образуют пару равных острых углов и пару равных тупых углов. Величину острого угла называют углом между неперпендикулярными прямыми.
- ✔ Если прямые перпендикулярны, то считают, что угол между ними равен $90°$.
- ✔ Два отрезка называют перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.
- ✔ На рисунке 295 изображены прямая a и перпендикулярный ей отрезок AB, конец B которого принадлежит прямой a. В таком случае говорят, что из точки A на прямую a опущен перпендикуляр AB. Точку B называют основанием перпендикуляра AB.

Рис. 295



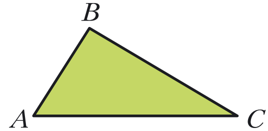
- ✔ Длину перпендикуляра AB называют расстоянием от точки A до прямой a. Если точка A принадлежит прямой a, то считают, что расстояние от точки A до прямой a равно нулю.
- ✔ Через данную точку проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.
- ✔ Прямую, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину, называют серединным перпендикуляром отрезка.

Треугольники

7. Треугольник и его элементы. Равные треугольники

- ✔ Три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, соединены отрезками (рис. 296). Образовавшаяся фигура ограничивает часть плоскости, которую вместе с отрезками AB, BC и CA называют треугольником. Точки A, B и C называют вершинами, а отрезки AB, BC и CA — сторонами треугольника. Треугольник называют и обозначают по его вершинам.

Рис. 296



- ✔ Периметром треугольника называют сумму длин всех его сторон.
- ✔ Треугольник называют остроугольным, если все его углы острые.
- ✔ Треугольник называют прямоугольным, если один из его углов прямой.
- ✔ Треугольник называют тупоугольным, если один из его углов тупой.
- ✔ Сторону прямоугольного треугольника, противолежащую прямому углу, называют гипотенузой, а стороны, прилежащие к прямому углу, — катетами.
- ✔ *Неравенство треугольника.* Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.
- ✔ Два треугольника называют равными, если их можно совместить наложением.
- ✔ В треугольнике против равных сторон лежат равные углы.
- ✔ В треугольнике против равных углов лежат равные стороны.
- ✔ В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит бо́льшая сторона.

8. Высота, медиана, биссектриса треугольника

- ✔ Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону, называют высотой треугольника.
- ✔ Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называют медианой треугольника.
- ✔ *Свойство медиан треугольника.* Все медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.
- ✔ Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны, называют биссектрисой треугольника.
- ✔ *Свойство биссектрисы треугольника.* Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам.
- ✔ Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

9. Признаки равенства треугольников

- ✔ *Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними*. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
- ✔ *Второй признак равенства треугольников: по стороне и двум прилежащим к ней углам*. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- ✔ *Третий признак равенства треугольников: по трём сторонам*. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

10. Равнобедренный треугольник и его свойства. Равносторонний треугольник

- ✔ Треугольник, у которого две стороны равны, называют равнобедренным.
- ✔ Равные стороны равнобедренного треугольника называют боковыми сторонами, а третью сторону — основанием равнобедренного треугольника.
- ✔ Вершиной равнобедренного треугольника называют общую точку его боковых сторон.
- ✔ В равнобедренном треугольнике:
  1) углы при основании равны;
  2) биссектриса угла при вершине является медианой и высотой.
- ✔ Треугольник, у которого все стороны равны, называют равносторонним.
- ✔ В равностороннем треугольнике: 1) все углы равны; 2) биссектриса, высота и медиана, проведённые из одной вершины, совпадают.

11. Признаки равнобедренного треугольника

- ✔ Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.
- ✔ Если медиана треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.

- Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.
- Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

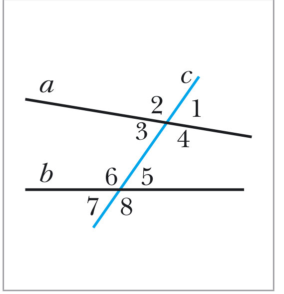
Параллельные прямые. Сумма углов треугольника

12. Параллельные прямые

- Две прямые называют параллельными, если они не пересекаются. Если прямые a и b параллельны, то пишут $a \parallel b$ (читают: «прямые a и b параллельны» или «прямая a параллельна прямой b»).
- *Основное свойство параллельных прямых (аксиома параллельности прямых)*. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.
- Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.
- Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
- Расстоянием между двумя параллельными прямыми называют расстояние от любой точки одной из прямых до другой прямой.

13. Признаки параллельности двух прямых

Рис. 297



- Если две прямые a и b пересечь третьей прямой c, то образуется восемь углов (рис. 297). Прямую c называют секущей прямых a и b.
Углы 3 и 6, 4 и 5 называют односторонними.
Углы 3 и 5, 4 и 6 называют накрест лежащими.
Углы 6 и 2, 5 и 1, 3 и 7, 4 и 8 называют соответственными.
- Если накрест лежащие углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.
- Если сумма односторонних углов, образовавшихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180°, то прямые параллельны.
- Если соответственные углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

14. Свойства параллельных прямых

- Если две параллельные прямые пересекаются секущей, то:
  1) углы, образующие пару накрест лежащих углов, равны;
  2) углы, образующие пару соответственных углов, равны;
  3) сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180°.
- Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

15. Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника

- Сумма углов треугольника равна 180°.
- Среди углов треугольника по крайней мере два угла острые.
- Внешним углом треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.
- Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.
- Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним.

16. Признаки равенства прямоугольных треугольников

- *Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.* Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.
- *Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам.* Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.
- *Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу.* Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.
- *Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу.* Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого, то такие треугольники равны.

- *Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.* Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

17. Свойства прямоугольного треугольника

- В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.
- Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.
- Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Окружность и круг

18. Геометрическое место точек

- Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество всех точек, обладающих определённым свойством.
- Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов этого отрезка.
- Биссектриса угла является геометрическим местом точек, которые принадлежат углу и равноудалены от его сторон.

19. Окружность и круг и их элементы

- Окружностью называют геометрическое место точек, расстояния от которых до заданной точки равны данному положительному числу. Эту точку называют центром окружности.
- Любой отрезок, соединяющий точку окружности с её центром, называют радиусом окружности.
- Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют хордой окружности. Хорду, проходящую через центр окружности, называют диаметром.
- Диаметр окружности в два раза больше её радиуса.
- Кругом называют геометрическое место точек, расстояние от которых до заданной точки не больше данного положительного числа. Заданную точку называют центром окружности, а данное число — радиусом круга. Если X — произвольная точка круга радиуса R с центром O, то $OX \leqslant R$. Окружность, ограничивающая круг, ему принадлежит.

- ✔ Хорда и диаметр круга — это хорда и диаметр окружности, ограничивающей круг.

20. Свойства окружности

- ✔ Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.
- ✔ Диаметр окружности, который делит хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен этой хорде.

21. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности

- ✔ Прямая и окружность могут не иметь общих точек, или иметь две общие точки, или иметь одну общую точку.
- ✔ Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют касательной к окружности.
- ✔ Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.
- ✔ Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.
- ✔ Если расстояние от центра окружности до некоторой прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к данной окружности.
- ✔ Если через данную точку к окружности проведены две касательные, то отрезки касательных, соединяющие данную точку с точками касания, равны.

22. Описанная и вписанная окружности треугольника

- ✔ Окружность называют описанной около треугольника, если она проходит через все вершины этого треугольника.
- ✔ Центр описанной окружности треугольника равноудалён от всех его вершин.
- ✔ Центр окружности, описанной около треугольника, — это точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон.
- ✔ Окружность называют вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.

- ✔ Центр вписанной окружности треугольника равноудалён от всех его сторон.
- ✔ Центр окружности, вписанной в треугольник, — это точка пересечения его биссектрис.
- ✔ Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычисляется по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где r — радиус вписанной окружности, a и b — длины катетов, c — длина гипотенузы.

Четырёхугольник

23. Параллелограмм. Свойства параллелограмма

- ✔ Параллелограммом называют четырёхугольник, у которого каждые две противоположные стороны параллельны.
- ✔ У параллелограмма противоположные стороны равны и противоположные углы равны.
- ✔ Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
- ✔ Высотой параллелограмма называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей сторону параллелограмма, на прямую, содержащую противоположную сторону.

24. Признаки параллелограмма

- ✔ Если в четырёхугольнике каждые две противоположные стороны равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
- ✔ Если в четырёхугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
- ✔ Если в четырёхугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

25. Прямоугольник

- ✔ Прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые.
- ✔ Диагонали прямоугольника равны.
- ✔ Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник.

✔ Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

26. Ромб

✔ Ромбом называют параллелограмм, у которого все стороны равны.

✔ Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

✔ Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

✔ Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм — ромб.

27. Квадрат

✔ Квадратом называют прямоугольник, у которого все стороны равны. Также квадрат — это ромб, у которого все углы прямые.

28. Средняя линия треугольника

✔ Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

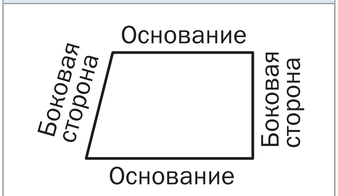
✔ Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

29. Трапеция

✔ Трапецией называют четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

✔ Параллельные стороны трапеции называют основаниями, а непараллельные — боковыми сторонами (рис. 298).

Рис. 298



✔ В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) углы A и D называют углами при основании AD, а углы B и C — углами при основании BC.

✔ Высотой трапеции называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей одно из оснований, на прямую, содержащую другое основание.

✔ Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины её боковых сторон.

- Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

30. Центральные и вписанные углы

- Центральным углом окружности называют угол с вершиной в центре окружности.
- Вписанным углом окружности называют угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.
- Вписанный угол измеряется половиной градусной меры дуги, на которую он опирается.
- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр (полуокружность), — прямой.

31. Вписанные и описанные четырёхугольники

- Четырёхугольник называют вписанным в окружность, если существует окружность, которой принадлежат все его вершины.
- Если четырёхугольник является вписанным в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.
- Если в четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то он является вписанным в окружность.
- Четырёхугольник называют описанным около окружности, если существует окружность, которая касается всех его сторон.
- Если четырёхугольник является описанным около окружности, то суммы его противоположных сторон равны.
- Если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то этот четырёхугольник является описанным около окружности.

Подобие треугольников

32. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках

- *Теорема Фалеса.* Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

- *Теорема о пропорциональных отрезках*. Если параллельные прямые пересекают стороны угла, то отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам, образовавшимся на другой стороне угла.

33. Подобие треугольников

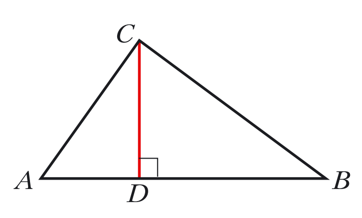
- Два треугольника называют подобными, если у них равны углы и соответственные стороны пропорциональны.
- *Лемма о подобных треугольниках*. Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от данного треугольника ему подобный.
- *Первый признак подобия треугольников*. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
- *Второй признак подобия треугольников*. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.
- *Третий признак подобия треугольников*. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Решение прямоугольных треугольников

34. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

- Квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу. Квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу (рис. 299).
$CD^2 = AD \cdot DB$;
$AC^2 = AB \cdot AD$;
$BC^2 = AB \cdot DB$.

Рис. 299



35. Теорема Пифагора

- В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

36. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника

- ✔ Синусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.
- ✔ Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.
- ✔ Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к прилежащему.
- ✔ Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к противолежащему.
- ✔ Синус, косинус, тангенс и котангенс угла зависят только от величины этого угла.
- ✔ Тригонометрические формулы:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha;$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha.$$

	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

37. Решение прямоугольных треугольников

- ✔ Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус угла, противолежащего этому катету.

- ✔ Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус угла, прилежащего к этому катету.
- ✔ Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на тангенс угла, противолежащего первому катету.
- ✔ Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на котангенс угла, прилежащего к первому катету.
- ✔ Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на синус противолежащего ему угла.
- ✔ Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на косинус прилежащего к нему угла.
- ✔ Решить прямоугольный треугольник — значит найти его стороны и углы по известным сторонам и углам.

Площадь многоугольника

38. Площадь параллелограмма

- ✔ Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, соответствующей этой стороне.

39. Площадь треугольника

- ✔ Площадь треугольника равна половине произведения его стороны и проведённой к ней высоты.
- ✔ Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

40. Площадь трапеции

- ✔ Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований и высоты.
- ✔ Площадь трапеции равна произведению её средней линии и высоты.

Ответы и указания к упражнениям

11. 3) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ или $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 4) 0,6. **12.** 1) $\frac{12}{13}$ или $-\frac{12}{13}$; 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$. **15.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $-2{,}5$; 3) $-\sqrt{3}-2$. **16.** 1) 3; 3) $\frac{2}{3}$. **21.** $-\frac{1}{2}$. **22.** 120°. **23.** 10 см, 30°, 120°. **26.** $5\sqrt{6}$ см. **30.** 120°. **31.** 45°. **37.** $2\sqrt{7}$ см. **38.** $\sqrt{10}$ см. **39.** $\sqrt{21}$ см или $\sqrt{29}$ см. **40.** 13 см. **41.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **42.** $3\sqrt{89}$ см. **43.** $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. **44.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$. **45.** 15 см, 24 см. **46.** 2 см, $4\sqrt{3}$ см. **47.** 3 см, 5 см. **48.** 10 см, 6 см, 14 см. **49.** 6 см или 10 см. **50.** 75 см. **51.** 13 см. **52.** $\sqrt{79}$ см. **56.** 14 см. **57.** 34 см. **58.** 7 см, 9 см. **59.** 20 см, 30 см. **60.** 8 см. *Указание*. Проведите через вершину B прямую, параллельную стороне CD, и рассмотрите образовавшийся треугольник. **61.** $\frac{13}{20}$. **62.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ см. **63.** Нет. **65.** 10 см. **66.** 6 см. **67.** 11 см. **68.** 6 см. **69.** 22 см. **74.** 4 см, 6 см. **91.** $2\sqrt{6}$ см. **92.** 6 см. **93.** $\frac{a\sin\beta}{\cos(\beta+\gamma)\sin\gamma}$. **94.** $\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **95.** $\frac{c\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma\sin\varphi}$. **96.** $\frac{m\sin\alpha\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$. **98.** 9 см. **99.** $\frac{25}{3}$ см. **100.** 60° или 120°. **101.** 4,5 ч. **102.** $\frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$. **103.** $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ+\frac{3\alpha}{4}\right)}$. **105.** $\frac{85}{8}$ см. *Указание*. Искомый радиус можно найти как радиус окружности, описанной около треугольника, сторонами которого являются одно из оснований, боковая сторона и диагональ трапеции. **106.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$. *Указание*. Докажите, что $CE = DE$. **107.** $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. *Указание*. На продолжении медианы AM за точку M отметьте точку K такую, что $AM = MK$, и примените теорему синусов к треугольнику ACK. **108.** $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$. **109.** *Указание*. Выразите углы AHB, BHC и AHC через углы треугольника ABC. **110.** Быстрее доехать через село C. *Указание*. Примите расстояние между какими-нибудь двумя сёлами за a и выразите через a расстояния между другими сёлами. **111.** Автобус. **114.** 12 см. **127.** 107°, 73°, 132°, 48°. *Указание*. Проведите через одну из вершин верхнего основания прямую, параллельную боковой стороне трапеции, и рассмотрите образовавшийся треугольник. **128.** 9 см. **129.** 30 см, 48 см. **135.** 1) 60° или 120°; 2) 90°. **136.** 30° или 150°. **140.** 12 см.

141. 24 см. **142.** 24 см^2. **143.** $\frac{7}{3}$ см. **144.** 1) $\frac{3}{2}$ см, $\frac{25}{8}$ см; 2) 8 см, $\frac{145}{8}$ см. **145.** 2 см, $\frac{145}{8}$ см. **156.** 3 : 5. **157.** $\frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$. **158.** $2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha+\beta)$. **159.** $\frac{b^2 \sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **160.** $\frac{h_1 h_2}{2\sin\alpha}$. **161.** $\frac{h^2 \sin\beta}{2\sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}$. **162.** 51 см^2, 75 см^2, 84 см^2. **163.** $\frac{24}{7}$ см. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD}$. **164.** 360 см^2. *Указание*. Проведите через один из концов верхнего основания трапеции прямую, параллельную боковой стороне трапеции, и найдите высоту треугольника, который эта прямая отсекает от трапеции. **165.** $12\sqrt{5}$ см^2. *Указание*. Пусть $ABCD$ – данная трапеция, $BC \parallel AD$. Проведите через вершину C прямую, параллельную прямой BD и пересекающую прямую AD в точке E. Докажите, что треугольник ACE и данная трапеция равновелики. **166.** 1 : 2. *Указание*. $\frac{S_{\Delta AMK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AK \cdot AM \sin A}{\frac{1}{2} AC \cdot AB \sin A} = \cos^2 A$. **167.** 19,5 см. **168.** 13 см, 14 см, 15 см. **170.** 10°. **171.** 91 см, 21 см. **172.** 9,6 см. **196.** $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. **197.** $2\sqrt{R^2 - r^2}$. **198.** $\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$. **202.** ≈17,4 см. **203.** ≈19,8 см. **204.** 5 сторон. **205.** 18 сторон. **208.** 1) $\frac{a(3+\sqrt{3})}{6}$; 2) $\frac{a(3-\sqrt{3})}{6}$. **209.** 1) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **210.** 1 : 2. **211.** $\sqrt{3}$: 2. **214.** 4,4 см. **215.** $2R^2\sqrt{2}$. **216.** $a\sqrt{3}$; $2a$; $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **217.** $6\left(\sqrt{2}-1\right)$ см. **218.** 8 см. **219.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $a(\sqrt{2}+1)$; $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **220.** $\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$. **221.** $\frac{a(2+\sqrt{2})}{2}$. **222.** Треугольников, или квадратов, или шестиугольников. *Указание*. Около одной точки можно уложить столько дощечек, во сколько раз угол при вершине дощечки, равный $\frac{180°(n-2)}{n}$, меньше 360°, т. е. $360° : \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{2n}{n-2}$ дощечек. Значение выражения $\frac{2n}{n-2}$ должно быть натуральным числом. Так как $\frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$, то значение выражения $\frac{4}{n-2}$ должно быть натуральным числом. **223.** *Указа-*

ние. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник (рис. 300), K — точка пересечения прямых CD и EF. Тогда AK — искомый отрезок. **225.** 18 см. **226.** 96 см^2. **227.** 9 см. **252.** 22,5°. **257.** $\sqrt{6}$ см. **259.** 1) $\dfrac{25(\pi - 2\sqrt{2})}{8}$ см^2; 2) $\dfrac{25(11\pi + 3)}{12}$ см^2. **260.** 1) $\dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}$ см^2; 2) $\dfrac{10\pi + 3\sqrt{3}}{3}$ см^2. **265.** 2π см, $\dfrac{10\pi}{3}$ см, $\dfrac{20\pi}{3}$ см. **266.** $\dfrac{25\pi}{18}$ см, $\dfrac{35\pi}{18}$ см, $\dfrac{20\pi}{3}$ см. **267.** $\dfrac{8\pi}{3}$ см. **268.** 6π см. **269.** 1 : 1. *Указание*. Докажите, что в обоих случаях сумма длин полуокружностей равна $\dfrac{1}{2}\pi \cdot AB$. **271.** 50 см. **273.** $\dfrac{a^2(\pi - 2)}{8}$. **274.** ≈17,3 %. **275.** $\dfrac{a^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{36}$. **276.** $\dfrac{\pi R^2}{9}$. **277.** $a^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$. **278.** $\dfrac{2\pi a}{3}$. *Указание*. Рассмотрите ΔAND и докажите, что он равносторонний. **279.** *Указание*. Сумма площадей всех закрашенных и незакрашенных «серпиков» равна сумме площадей двух кругов, диаметры которых являются соседними сторонами прямоугольника, а сумма площадей незакрашенных «серпиков» и прямоугольника равна площади круга, диаметр которого является диагональю прямоугольника. Покажите, что эти суммы равны. **280.** *Указание*. Общая часть квадратов содержит круг, радиус которого равен $\dfrac{1}{2}$ см (рис. 301). **282.** $\dfrac{130}{17}$ см, $\dfrac{312}{17}$ см. **283.** *Ука-*

Рис. 300

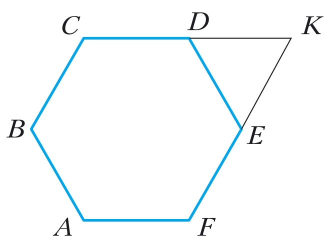
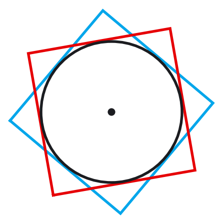


Рис. 301



зание. Через середину меньшего основания проведите прямые, параллельные боковым сторонам трапеции. **303.** 1) Да, точка B лежит между точками A и C; 2) нет. **305.** $x = 7$ или $x = -1$. **306.** (3; 0). **307.** (0; 0,5). **308.** (3; –0,5). **309.** (–2; 2). **310.** (3; –2). **314.** A (–5; 3), C (7; 5). **315.** $2\sqrt{73}$. **316.** $(3\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})$ или $(-3\sqrt{3};\ -2\sqrt{3})$. **317.** $(-2;\ 4\sqrt{3})$ или $(-2;\ -4\sqrt{3})$. **318.** (3; 3) или (–6; 6). *Указание*. Рассмотрите два случая: B (a; a) или B (a; $-a$). **319.** (5,5; 0), (3; 0), (–1; 0). *Указание*. Рассмотрите три случая: $AC = BC$, $AC = AB$ и $BC = AB$. **320.** (0; 6), (0; 4), (0; 3,5), (0; 8,5). *Указание*. Рассмотрите три случая: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AC^2 + AB^2 = BC^2$. **321.** $\sqrt{33}$ см. **322.** 56°, 124°. **323.** 8 см и 16 см. **342.** Две окружности: $x^2 + (y - 11)^2 = 45$ и $x^2 + (y + 1)^2 = 45$. **343.** $(x - 3)^2 + y^2 = 50$. **345.** 1) Да, точка (–1; 5) — центр окружности, $R = 7$; 2) нет; 3) нет; 4) да, точка (2; 7) — центр окружности, $R = \sqrt{2}$. **346.** 1) Точка (0; –8) — центр окружности, $R = 2$; 2) точка (4; –2) — центр окружности, $R = \sqrt{5}$. **347.** $(x - 2)^2 + y^2 = 13$. **348.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ или $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 25$. **349.** $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 10$ или $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. **350.** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ или $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. *Указание*. Диаметр искомой окружности равен расстоянию между осью абсцисс и прямой $y = -4$, а центр окружности принадлежит биссектрисе третьего или четвёртого координатного угла. **351.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ или $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$. **352.** 1) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$; 2) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 169$. **353.** $180\sqrt{3}$ см². **354.** 70 см. **355.** 600 см². **362.** 1) $y = 2x - 5$; 2) $x = 3$; 3) $y = -1$; 4) $5x + 3y = 6$. **363.** 1) $y = -3x + 1$; 2) $x - 6y = 12$. **364.** 1) (–8; –31); 2) (–1; 2). **365.** 1) (2; –7); 2) (4; –1). **366.** $y = -0{,}5x - 4$. **367.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$. **369.** 12. **370.** 28. **371.** 6. **372.** (2; 5), (5; 2). **373.** (5; 0). **375.** $\frac{10\sqrt{29}}{29}$. *Указание*. Искомое расстояние равно высоте треугольника, ограниченного осями координат и данной прямой. **376.** $4\sqrt{2}$. **377.** $3\sqrt{10}$. **378.** $x - 3y = 2$. **379.** $7x + 5y = -8$. **380.** (3; 3) или (15; 15). **381.** (–2; 2) или (–10; 10). **382.** $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 17$. **383.** $(y - 4)(y + 4) = 0$. **384.** $\sqrt{10}$ см, $\sqrt{58}$ см. **385.** 104 см. **386.** 12,5 см. **391.** 1) $y = 4x + 19$; 2) $y = -3x - 2$; 3) $y = 7$. **392.** $y = -0{,}5x - 4$. **393.** 1) $y = -7x + 2$; 2) $3x - 4y = -39$. **394.** 1) $y = 9x + 13$; 2) $3x + y = 9$. **395.** 1) $y = x\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3}$; 2) $y = -x\sqrt{3} + 6 + 2\sqrt{3}$. **396.** 1) $y = x - 5$; 2) $y = -x + 1$. **397.** *а*) $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} + 3$; *б*) $y = -\frac{x\sqrt{3}}{3} + 2$. **398.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет. **400.** $y = 4x + 9$. **401.** $y = 3x - 12$. **404.** 30 см, 40 см. **405.** 144 см². **431.** Прямоугольник или равнобокая трапеция. **439.** 60°, 120°. **440.** 4 см, 12 см. **441.** $\frac{a\sqrt{13}}{3}$. *Указание*. Проведите через вершину B прямую, параллельную прямой MK. **457.** $\overrightarrow{AF}(-2; 2)$, $\overrightarrow{FD}(2; 4)$. **458.** $\overrightarrow{DE}(-4; 6)$, $\overrightarrow{EO}(-4; -6)$. **459.** $\vec{a}(-6; -8)$ или $\vec{a}(8; 6)$. **460.** $\vec{c}(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ или $\vec{c}(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. **461.** C (7; 17), D (2; 17) или C (7; –7), D (2; –7). **462.** B (16; 2), C (16; –6) или B (–14; 2), C (–14; –6). **464.** 20 см, 7 см, 21 см. **465.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **511.** 1) Да;

2) да; 3) нет. **512.** *Указание*. Покажите, что каждый из векторов $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ равен нуль-вектору. **514.** *Указание*. Достаточно показать, что $\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{XD}-\overrightarrow{XC}$. **515.** 1) Окружность радиуса AB с центром в точке A. 2) Серединный перпендикуляр отрезка AB. **516.** 0,2 м/с, $\sqrt{1{,}04}$ м/с. **517.** 60°. **518.** *Указание*. Пусть AA_1 – медиана треугольника ABC. На продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложите отрезок A_1D, равный MA_1. **519.** *Указание*. Имеем: $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{0}$, $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{0}$, отсюда $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$. **520.** 4 см, 6 см. **552.** –4; 4. **553.** –1,5. **555.** $\vec{m}(-15;\ 36)$. **556.** $\vec{a}(-3;\ 4)$. **559.** $x=2$, $y=-3$. **560.** $\overrightarrow{OK}=0{,}5\vec{a}-0{,}1\vec{b}$. **564.** $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **566.** *Указание*. $\overrightarrow{M_1M_2}=$ $=\overrightarrow{M_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2M_2}$. С другой стороны, $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2M_2}$. Сложите эти равенства. **572.** *Указание*. Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 – медианы треугольника ABC. Воспользуйтесь тем, что $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. **573.** *Указание*. Воспользуйтесь задачей 566 и ключевой задачей 1 § 15. **574.** *Указание*. Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. **575.** 18 см. **576.** 60°; $24\sqrt{3}$ см². **577.** $R\sqrt{3}$. **593.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. **596.** –3 и 3. **597.** –1. **599.** $\vec{b}(-12;16)$. **600.** –1 и 1. **602.** 4. **603.** –0,5. **604.** $\sqrt{7}$. **605.** $2\sqrt{7}$. **608.** $\frac{3}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$. **609.** 30°, 60°, 90°. **612.** 0°. **613.** 120°. **614.** *Указание*. Пусть $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AK}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. Найдите $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AK}$. **615.** 45°. *Указание*. Пусть $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Очевидно, что $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. Тогда $\overrightarrow{AO}=2\vec{c}$, $\overrightarrow{DO}=3\vec{b}$. Отсюда $\overrightarrow{AB}=2\vec{c}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}+3\vec{b}$. **616.** 30°. *Указание*. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$. Отсюда $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{BD}^2=$ $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cdot\cos\angle ABD$. **617.** *Указание*. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{MF}=$ $=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BF}$. Осталось показать, что $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. **619.** 100 см. **620.** 6π см. **633.** При $AB \parallel a$. **643.** 1) Бесконечно много; 2) бесконечно много. **649.** $(x+3)^2+(y-4)^2=1$. **650.** $y=x^2-4x+1$. **651.** *Указание*. Пусть $ABCD$ – искомая трапеция ($BC \parallel AD$). Постройте образ диагонали BD при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$. **653.** *Указание*. Постройте образ данной прямой при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ (или $\overrightarrow{BA}$). Рассмо-

трите точки пересечения образа с данной окружностью. Заметим, что если построенный образ и данная окружность не имеют общих точек, то задача не имеет решения. **655.** *Указание*. Пусть $ABCD$ — искомый четырёхугольник с данными сторонами AB и CD (рис. 302). Рассмотрим параллельный перенос стороны AB на вектор $\overrightarrow{BC}$. Треугольник A_1CD можно построить по двум сторонам CD и $CA_1 = BA$ и углу A_1CD, равному $\angle BCD - (180^\circ - \angle ABC)$. Треугольник AA_1D можно построить по стороне A_1D и двум прилежащим углам AA_1D и ADA_1. **656.** *Указание*. Пусть точка A_1 — образ точки A при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$. Соедините точки A_1 и B. **657.** 36 см. **658.** 40. **659.** 490 см^2. **680.** $a \perp l$ или прямые a и l совпадают. **683.** *Указание*. Если четырёхугольник имеет ось симметрии, то образом любой его вершины является вершина этого же четырёхугольника. Выберите некоторую вершину параллелограмма и рассмотрите две возможности: её образом является или соседняя вершина, или противолежащая. **686.** *Указание*. Углы M_1BA и MBA симметричны относительно прямой AB. Следовательно, $\angle M_1BA = \angle MBA$. Аналогично $\angle M_2BC = \angle MBC$. Осталось показать, что $\angle M_1BM_2 = 180^\circ$. **687.** 1) A_1 $(0; -2)$, B_1 $(-1; 3)$; 2) A_2 $(0; 2)$, B_2 $(1; -3)$. **688.** $x = 2$, $y = -1$. **689.** *Указание*. Пусть точка A_1 — образ точки A при симметрии относительно прямой a. Тогда точка пересечения прямых a и A_1B будет искомой. Заметим, что если точки A и B симметричны относительно прямой a, то задача имеет бесконечно много решений. **691.** *Указание*. Пусть точка A_1 — образ точки A при симметрии относительно прямой a. Тогда точка пересечения прямых a и A_1B будет искомой. **692.** *Указание*. Пусть треугольник A_1BC — образ треугольника ABC при симметрии относительно серединного перпендикуляра отрезка BC (рис. 303). Треугольник ACA_1 можно построить по известным сторонам AC и A_1C ($A_1C = AB$) и углу ACA_1, равному разности углов B и C. **693.** *Указание*. Пусть точка C_1 симметрична точке C относительно прямой AB. Постройте окружность с центром в точке C_1,

Рис. 302

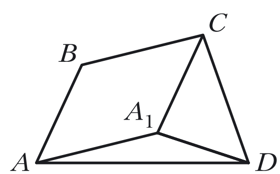
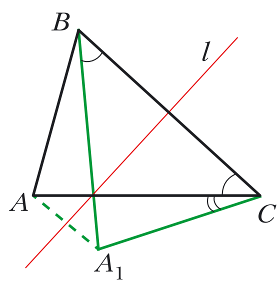


Рис. 303



которая касается прямой AB. Проведите через точку D касательную к построенной окружности. Эта касательная пересекает прямую AB в искомой точке. **715.** *Указание*. Пусть ΔABC имеет центр симметрии. Тогда, например, образом вершины A является вершина B. Следовательно, центр симметрии — это середина стороны AB. Однако в этом случае образ вершины C не будет принадлежать треугольнику ABC. **717.** *Указание*. При центральной симметрии образом стороны данного четырёхугольника является сторона этого же четырёхугольника. Далее воспользуйтесь ключевой задачей § 19. **718.** *Указание*. При симметрии относительно точки O образы точек A_1 и B_1 принадлежат окружности с центром O_2. Так как образом прямой, проходящей через центр симметрии, является эта же прямая, то образы точек A_1 и B_1 также принадлежат прямой A_1B_1. Следовательно, отрезок A_2B_2 — образ отрезка A_1B_1. **719.** 2 см или 1 см. **720.** 2 см. *Указание*. При рассматриваемом повороте точка B является образом точки D, точка C_1 — образом точки C, точка A — образом точки A (рис. 304). Следовательно, ΔABC_1 — образ ΔADC. Отсюда $\angle ABC_1 = \angle ADC = 90°$. Следовательно, точки C_1, B, C лежат на одной прямой. **721.** *Указание*. Рассмотрите центральную симметрию с центром в точке пересечения диагоналей параллелограмма. **722.** *Указание*. Найдите середину отрезка AC, а далее воспользуйтесь задачей 2 § 19. **723.** *Указание*. Пусть O — данная точка, l_1 и l_2 — данные прямые. Построим образ прямой l_1 при симметрии относительно точки O. Получим прямую l_1' (рис. 305), которая пересекает прямую l_2 в точке E.

Рис. 304

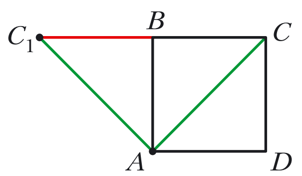
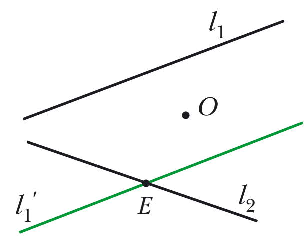


Рис. 305



Найдём прообраз точки E при рассматриваемой симметрии. Очевидно, что он должен принадлежать прямой l_1. Следовательно, точка, симметричная точке E относительно точки O, также принадлежит прямой l_1. **724.** *Указание*. Воспользуйтесь идеей решения примера 5 § 18. **725.** *Указание*. Рассмотрим поворот с центром в точке C против часовой стрелки на угол 60°. При таком повороте образами точек E и B будут соответственно точки D и A. Следовательно, отрезок AD и его середина K будут соответственно образами отрезка BE и его середины M. **726.** *Указание*. Пусть l_1, l_2, l_3 — данные параллельные прямые, O – произвольная точка прямой l_2 (рис. 306). Прямая l_1' – образ прямой l_1 при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 60° – пересекает прямую l_3 в точке M. Найдём прообраз точки M при заданном повороте. Очевидно, что он принадлежит прямой l_1. Поэтому достаточно отложить от луча OM угол, равный 60°. **727.** *Указание*. Пусть O – данная точка, l_1, l_2 и l_3 – данные прямые. Постройте отрезок AC, серединой которого является точка O, а концы принадлежат прямым l_1 и l_2. Этот отрезок является одной из диагоналей ромба. Найдите точку пересечения прямой l_3 с серединным перпендикуляром отрезка AC. **728.** *Указание*. Рассмотрим поворот с центром в точке A против часовой стрелки на угол 90°. При этом повороте образом отрезка AD будет отрезок AB (рис. 307). Пусть E_1 – образ точки E. Тогда треугольник ABE_1 – образ треугольника ADE. Отсюда $\Delta ABE_1 = \Delta ADE$. Тогда $DE = BE_1$, $AE = AE_1$, $\angle E_1AB = \angle EAD$. Имеем: $\angle E_1AF = \angle E_1AB + \angle BAF = \angle EAD + \angle FAE = \angle FAD$. Но $\angle FAD = \angle E_1FA$. Следовательно, ΔAEF – равнобедренный и $AE_1 = E_1F$. **729.** *Указание*. Рассмотрим поворот с центром в точке A по часовой стрелке на угол 60° (рис. 308). При этом повороте образом треугольника ABP будет

Рис. 306

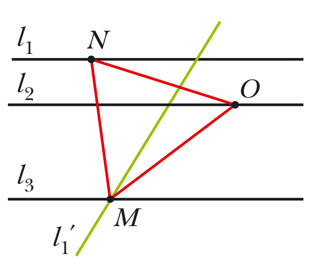


Рис. 307

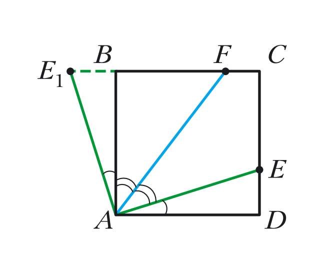
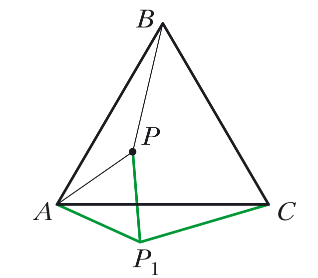


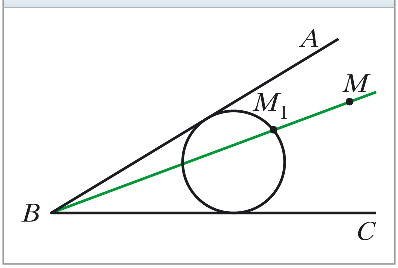
Рис. 308



треугольник ACP_1 (точка P_1 – образ точки P). Отсюда $\angle AP_1C = \angle APB = 150°$. Треугольник APP_1 – равносторонний. Тогда $\angle AP_1P = 60°$. Следовательно, $\angle PP_1C = 90°$. Осталось заметить, что $P_1C = PB$ и $PP_1 = AP$. **732.** $\frac{120}{7}$ см. **752.** 1) 1,5; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **756.** $\frac{1}{3}$. **757.** 12 см. **758.** 28,8 см². **760.** $\frac{S}{16}$. **761.** 1) $k = 2$, точка B или $k = -2$, точка пересечения диагоналей трапеции $AMNC$. **766.** *Указание*. Пусть данная окружность касается прямой a в точке M. Точка M_1 – образ точки M при гомотетии с центром A. Так как образом прямой a является эта же прямая, то точка M_1 принадлежит прямой a. Покажите, что образ данной окружности и прямая a имеют только одну общую точку M_1. **767.** $-\frac{1}{2}$. *Указание*. По определению гомотетии $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

Найдите координаты векторов $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$. **768.** $(-3; 2)$. **769.** 1) $x = -3$, $y = 8$; 2) $x = 12$, $y = -2$. **770.** $x = 0$, $y = 8$. **771.** 28 см^2. **772.** 20 см^2. **773.** 112 см^2. **775.** 1) $y = 2x + 2$; 2) $y = 2x - \frac{1}{2}$. *Указание*. Выберите произвольную точку M, принадлежащую данной прямой. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM_1} = 2\overrightarrow{OM}$. Точка M_1 — образ точки M при данной гомотетии. Воспользуйтесь тем, что угловой коэффициент искомой прямой равен 2. **776.** 1) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$; 2) $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 16$. **777.** *Указание*. Прямая A_2B_2 является образом прямой A_1B_1 при гомотетии с центром в точке касания и коэффициентом, равным отношению большего радиуса к меньшему. **779.** Окружность, которая является образом данной окружности при гомотетии с центром A и коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$, за исключением точки A. **781.** *Указание*. Треугольник с вершинами в полученных точках является образом треугольника с вершинами в серединах сторон данного треугольника при гомотетии с центром M и коэффициентом, равным 2. **782.** *Указание*. Постройте произвольный треугольник, два угла которого равны двум данным углам. Опишите около него окружность. Искомый треугольник является образом построенного треугольника при гомотетии с центром в произвольной точке и коэффициентом, равным отношению данного радиуса к радиусу построенной окружности. **784.** *Указание*. См. решение задачи 2 § 20. **785.** *Указание*. Рассмотрите гомотетию с центром в середине отрезка AB и коэффициентом, равным $\frac{1}{3}$. **786.** Прямая, являющаяся образом прямой l при гомотетии с центром в середине отрезка AB и коэффициентом, равным $\frac{1}{3}$, за исключением точки пересечения прямых AB и l (если такая точка существует). **787.** *Указание*. Постройте любую окружность, касающуюся сторон угла (рис. 309). Пусть M_1 — одна из точек пересечения прямой BM с построенной окружностью. Рассмотрите гомотетию с центром в точке B и коэффициентом, равным $\frac{BM}{BM_1}$. Задача имеет два решения. **788.** 96 см^2, 4,8 см. **789.** 24. **805.** $48\sqrt{2}$ см^2. **806.** 36 см^2. **810.** $y = 0{,}5x - 0{,}5$. **820.** $\approx$ 1,24 мм. **821.** $\approx$ 60 000 Н. **822.** 200π см^2; 320π см^3. **823.** 320π см^2; 1024π см^3. **824.** $\approx$ 3770 кг. **825.** 4,5 см. **826.** $\approx$ 550 кг. **829.** $\approx$ 3 кг. **830.** 25 см или 39 см. *Указание*. Найдите синус угла между

Рис. 309



данными сторонами, а затем — его косинус. **831.** $(x-4)^2+y^2=25$ или $(x+2)^2+y^2=25$. **832.** $2\sqrt{17}$ см или $2\sqrt{41}$ см. **833.** $\frac{\sqrt{2}}{7}$. **835.** 9 см, 24 см. **836.** 1 см или 2 см. **837.** 36 см. **838.** $\sqrt{4a^2+d^2}$. **839.** 4 см. *Указание*. Так как трапеция $ABCK$ является вписанной, то $AB=CK$. Тогда $\angle KAC=\angle AKB$, $AC=BK$. **840.** $\frac{9}{16}$; $-\frac{9}{16}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$. **841.** $\sqrt{111}$ см. **842.** 9,5 см. **843.** 12 см. **844.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **845** $1:1:\sqrt{3}$. **846.** 6 см. **847.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см. **848.** $\frac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}$. *Указание*. Воспользуйтесь формулой для вычисления площади треугольника по двум сторонам и углу между ними. **849.** $4\sqrt{3}$ см^2. **850.** 12 см, 15 см, $\frac{65}{8}$ см. **851.** 15 см. **852.** 132 см^2. **853.** 450 см^2. **854.** 36 см^2. **856.** $6\sqrt{3}$ см^2. **857.** 1 : 2. **858.** $2a(2-\sqrt{3})$. **859.** 45 см. **860.** $\frac{32\pi}{15}$ см. **862.** $\frac{R^2(4\pi-3\sqrt{3})}{6}$; $\frac{4}{3}\pi R$. **863.** 54°. **865.** $3m$. **866.** $\frac{R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}$. **868.** $(-9;\ 0)$. **869.** $(0;\ -2{,}5)$. **873.** $(x-7)^2+(y+0{,}5)^2=6{,}25$. **874.** Да. **875.** Да. **876.** $(-1;\ 0)$, $(-9;\ 0)$. **877.** 10π. **878.** $y=6x+23$. **879.** $y=-x+3$. **880.** $y=-\frac{5}{3}x-4$. **893.** $-\frac{4}{5}$. **894.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **896.** $5x+y=22$. **913.** 3 см или $3\sqrt{3}$ см. **914.** 3 см^2. **915.** 27,5 см^2. **916.** $\frac{320}{27}$ см^2. **917.** $\frac{25}{16}$. *Указание*. Треугольник $A_2B_2C_2$ является образом треугольника ABC при гомотетии с коэффициентом, равным $-\frac{5}{4}$, и центром в точке пересечения медиан треугольника ABC.

Ответы к заданиям «Проверьте себя» в тестовой форме

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Г	В	А	Б	А	Г	А	В	Б	Б	Г	Б
2	В	Б	Б	Г	А	А	Г	А	Г	В	Б	А
3	Б	Б	А	В	Б	Г	В	Г	Б	В	Б	А
4	В	Г	А	В	А	А	Б	Г	В	А	Г	В
5	Б	А	Г	В	В	Б	Г	А	В	В	А	Г

Алфавитно-предметный указатель

Вектор 102
Вектора координаты 109
— модуль 103
Векторы коллинеарные 103
— перпендикулярные 136
— противоположно направленные 104
— противоположные 117
— равные 104
— сонаправленные 103

Гомотетия 176

Движение 151
Декартовы координаты 74
Длина дуги окружности 60
— окружности 60

Единичная полуокружность 4

Композиция преобразований 178
Координаты середины отрезка 75
Косинус 5
Котангенс 7
Конус 206
Коэффициент гомотетии 176
— подобия 180
Круговой сегмент 62
— сектор 61

Направленный отрезок 102
Нуль-вектор 103

Образ точки 151
— фигуры 151
Объём конуса 207
— пирамиды 200
— призмы 199
— цилиндра 206
— шара 208
Осевая симметрия 160
Основание сегмента 62
Ось симметрии 160

Параллельный перенос 151
Пирамида 200

Площадь боковой поверхности пирамиды 200
— — — призмы 199
— круга 61
— сектора 62
Поворот 170
Полукруг 62
Правило параллелограмма 115
— треугольника 113
Правильный многоугольник 48
Преобразование подобия 179
— тождественное 151
— фигуры 151
Призма 198
Прообраз фигуры 151

Равные фигуры 152
Разность векторов 116
Решение треугольников 27

Свойства гомотетии 178
— скалярного произведения векторов 139
— сложения векторов 115
— умножения вектора на число 126
Свойства осевой симметрии 160
Свойство параллельного переноса 152
— поворота 171
— центральной симметрии 167
Симметрия относительно прямой 159
— — точки 166
Синус 5
Скалярный квадрат вектора 137
Скалярное произведение векторов 136
Стереометрия 197
Сумма векторов 113
Сфера 207

Тангенс 6
Теорема косинусов 12
— синусов 20
Тригонометрические функции 7
Тригонометрия 31

Угловой коэффициент прямой 93
Угол между векторами 136
— — прямой и положительным направлением оси абсцисс 92
— поворота 170
Умножение вектора на число 124
Уравнение окружности 81
— прямой 87
— фигуры 80
Условие перпендикулярности векторов 137

Фигуры подобные 179
Формула Герона 34
— для нахождения площади многоугольника, описанного около окружности 36
— радиуса окружности, вписанной в многоугольник 37
— расстояния между точками 75
Формулы для нахождения площади треугольника 33–36
— радиуса окружности, описанной около треугольника 35
— —, вписанной в треугольник 37

Центральная симметрия 166
Центр гомотетии 176
— поворота 170
— правильного многоугольника 50
— симметрии 166
Центральный угол правильного многоугольника 50
Цилиндр 205

Шар 208

Оглавление

От авторов 3

Глава 1. Решение треугольников
§ 1. Тригонометрические функции угла от 0° до 180° 4
§ 2. Теорема косинусов 11
§ 3. Теорема синусов 19
§ 4. Решение треугольников 27
Тригонометрия — наука об измерении треугольников . . . 31
§ 5. Формулы для нахождения площади треугольника 33
Вневписанная окружность треугольника 42
Задание № 1 «Проверьте себя» в тестовой форме 45
Итоги главы 1 46

Глава 2. Правильные многоугольники
§ 6. Правильные многоугольники и их свойства 48
О построении правильных n-угольников 57
§ 7. Длина окружности. Площадь круга 59
Построение правильного пятиугольника и золотое сечение. 70
Задание № 2 «Проверьте себя» в тестовой форме 71
Итоги главы 2 72

Глава 3. Декартовы координаты
§ 8. Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка 74
§ 9. Уравнение фигуры. Уравнение окружности 79
§ 10. Уравнение прямой 86
§ 11. Угловой коэффициент прямой 92
Метод координат 96
Как строили мост между геометрией и алгеброй 98
Задание № 3 «Проверьте себя» в тестовой форме 100
Итоги главы 3 101

Глава 4. Векторы
§ 12. Понятие вектора 102
§ 13. Координаты вектора 109
§ 14. Сложение и вычитание векторов 113
§ 15. Умножение вектора на число 124
Применение векторов 134
§ 16. Скалярное произведение векторов 136

Разложение вектора по двум данным неколлинеарным векторам 144
Задание № 4 «Проверьте себя» в тестовой форме 145
Итоги главы 4 146

Глава 5. Геометрические преобразования
§ 17. Движение (перемещение) фигуры. Параллельный перенос . . . 150
§ 18. Осевая симметрия 159
§ 19. Центральная симметрия. Поворот 166
§ 20. Гомотетия. Подобие фигур 176
Применение преобразований фигур при решении задач . . . 190
Задание № 5 «Проверьте себя» в тестовой форме 193
Итоги главы 5 195

Глава 6. Начальные сведения по стереометрии
§ 21. Прямая призма. Пирамида 197
§ 22. Цилиндр. Конус. Шар 205

Дружим с компьютером 211
Проектная работа 215
Упражнения для повторения курса геометрии 9 класса 219
Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте 227
Сведения из курса геометрии 7–8 классов 228
Ответы и указания к упражнениям 243
Ответы к заданиям «Проверьте себя» в тестовой форме . . . 253
Алфавитно-предметный указатель 253

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

	$\alpha = 0°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 90°$	$\alpha = 180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–

Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

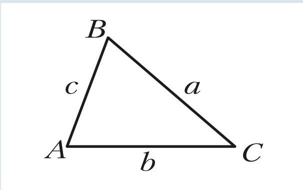
$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

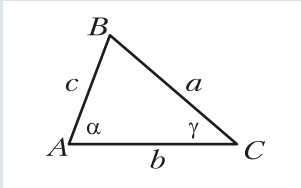
$$\mathrm{ctg}(180° - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Соотношения между сторонами и углами треугольника



Теорема синусов	Теорема косинусов
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Формулы для нахождения площади треугольника



$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

Формулы для нахождения радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника

$$r = \frac{S}{p} \qquad R = \frac{a}{2\sin\alpha} \qquad R = \frac{abc}{4S}$$

Декартовы координаты на плоскости

Расстояние между двумя точками	Если $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$, то $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Координаты середины отрезка	Если $C\ (x_0; y_0)$ – середина отрезка AB с концами $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$, то $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$
Уравнение окружности	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, где $A\ (a; b)$ – центр окружности, R – радиус окружности
Уравнение прямой	$ax + by = c$, где a, b и c – некоторые числа, причём a и b не равны нулю одновременно